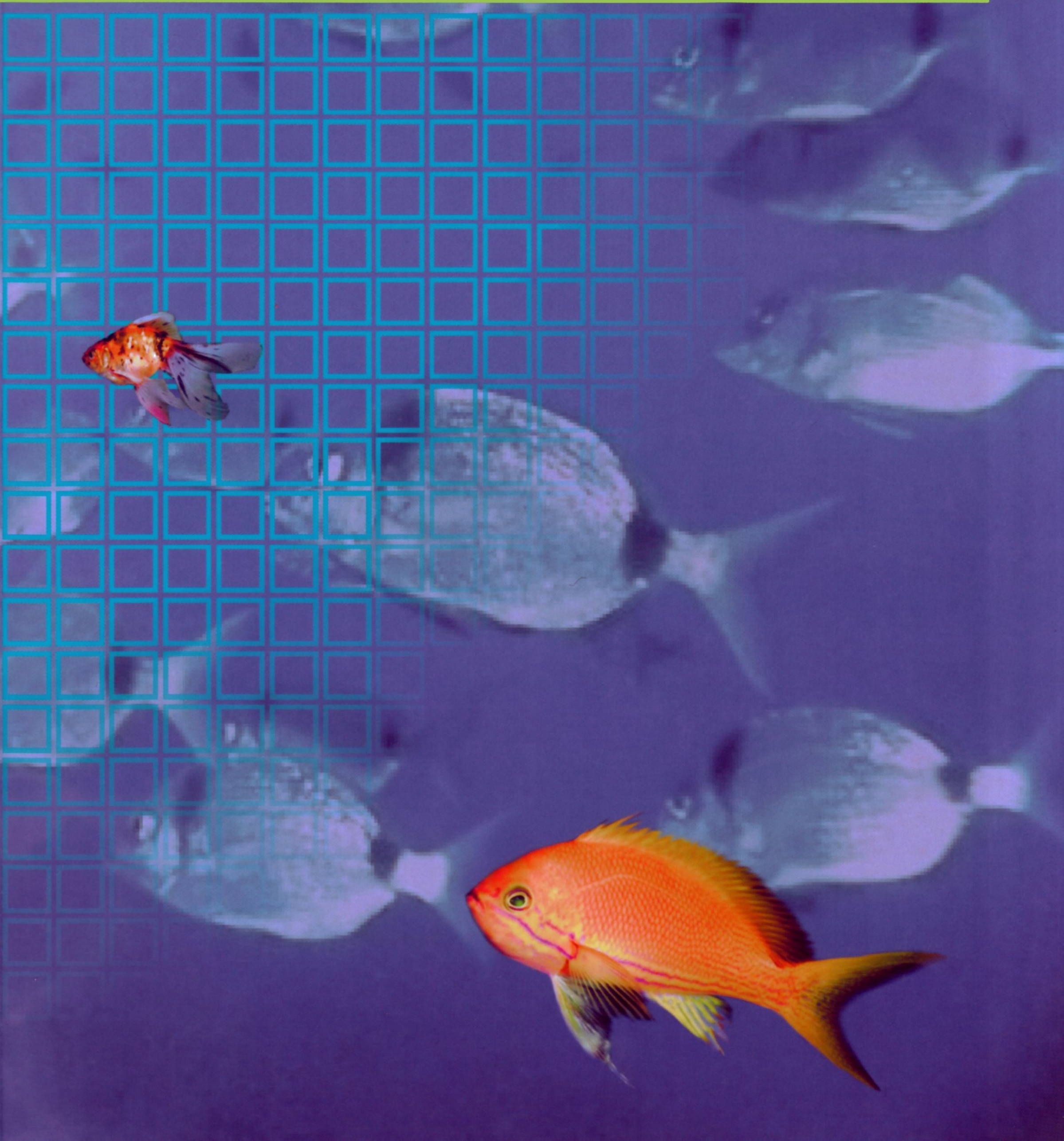
MATEMATIKA 11–12

Bendrasis kursas. I knyga



MATEMATIKA 11-12

BENDRASIS KURSAS

1 KNYGA

TEV
VILNIUS 2008

LEIDĖJŲ ŽODIS

Šis vadovėlis skirtas XI–XII klasių mokiniams, pasirinkusiems bendrąjį matematikos kursą. Juo galės naudotis tie, kurie neplanuoja laikyti jokio matematikos egzamino arba rengiasi laikyti mokyklinį matematikos egzaminą.

Vadovėlyje nagrinėjamos temos yra sudėtinė išplėstinio matematikos kurso dalis, todėl kaip mokomoji priemonė jis gali būti naudingas ir tiems, kurie laikys valstybinį matematikos egzaminą, tačiau jaučiasi silpnesni. Mat šiame vadovėlyje medžiaga dėstoma daug paprasčiau ir suprantamiau nei leidyklos TEV išleistuose išplėstinio matematikos kurso vadovėliuose „Matematika 11“ ir „Matematika 12“.

Vadovėlį sudaro dvi knygos, suskirstytos į 4 dalis, atitinkančias naująsias programas ir standartus: *Realieji skaičiai ir algebra*, *Funkcijos, lygtys ir nelygybės*, *Diferencialinis skaičiavimas*, *Tikimybės ir statistika*.

Išplėstinio kurso temos — planimetrija, stereometrija, vektoriai, integralinis skaičiavimas — šiame vadovėlyje nenagrinėjamos. Tačiau planimetriją ir stereometriją, kurių prireiks laikant mokyklinį egzaminą, galima prisiminti sprendžiant vadovėlyje pateikiamus uždavinius.

Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant šį vadovėlį.

UDK 51(075.3)
Kn42

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2005 03 16 Nr. 46

Valstybinės lietuvių kalbos komisijos 2005 m. vasario 23 d. sprendimu vadovėlis atitinka kalbos taisyklingumo reikalavimus

Vadovėlį rengė:
Jolanta Knyvienė, Milda Vosylienė, Valdas Vanagas

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Inga Paukštienė, Daiva Sniečkutė*

Tekstą rinko ir maketavo: *Laimutė Ališauskienė, Nijolė Drazdauskienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-680-01-6

KAIP NAUDOTIS VADOVĖLIU

Vadovėlį sudaro dvi knygos, kurių struktūra vienoda — medžiaga suskirstyta į dalis, o šios — į skyrius ir skyrelius.

Kiekvieno skyriaus pradžioje pateikiamas jo turinys. Kiekviename skyrelyje glaustai išdėstoma teorija. Paraštėje klaustuku ? pažymėti nebaigti spręsti pavyzdžiai ir pamąstymui suformuluoti klausimai. Skyrelio pabaigoje pateikiami ją iliustruojantys pratimai ir uždaviniai. Čia rasite daugybę išspręstų pavyzdžių, nurodymų ir patarimų, kaip spręsti, formulių ir priminimų. Visi jie pažymėti ženkleliu !!.

Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra du uždavinių skyreliai — *Geometrijos uždaviniai* ir *Pasitikrinkime*. Pirmasis skirtas geometrijos kursui prisiminti, o antrasis — išsiaiškinti, kaip pavyko nagrinėtus dalykus suprasti ir įsiminti. Skyrelio *Pasitikrinkime* uždavinių atsakymus rasite knygos pabaigoje.

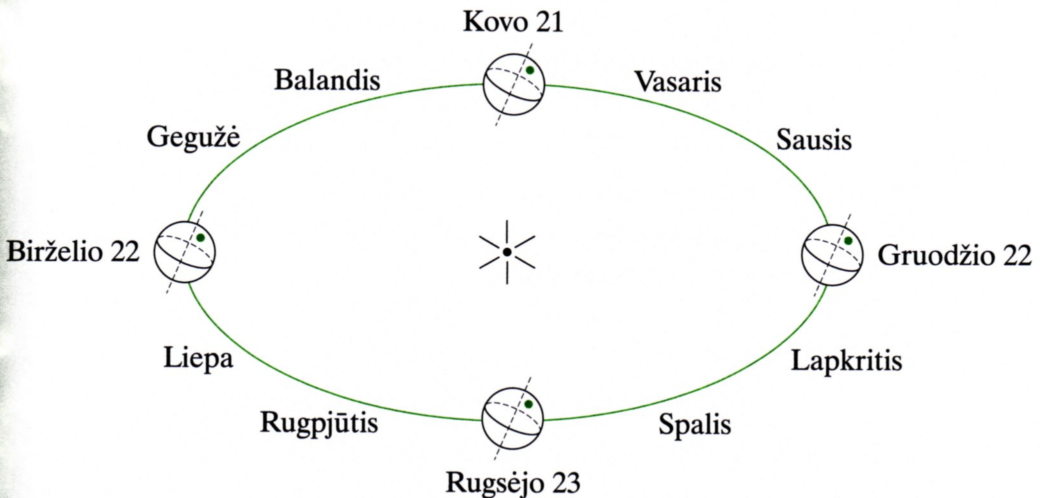
Uždaviniai parinkti taip, kad apimtų ne tik vidurinės, bet ir pagrindinės mokyklos kursą. Todėl stipresniesiems mokiniams su lengvais uždaviniais (ypač skyrių *Aibės* ir *Reiškiniai*) galima ir negaišti. Tie, kas moka atlikti veiksmus su skaičiais, juos apvalinti, rasti apytikslės reikšmės paklaidas, skaičiuoti procentus, spręsti paprastas lygtis, nelygybes bei jų sistemas, prastinti reiškinius, gali iškart spręsti skyrelių *Pasitikrinkime* uždavinius. Šiek tiek sunkesnių uždavinių numeriai yra nuspalvinti.

Prieš kiekvieno skyriaus turinį yra įdomybėms skirti puslapiai. Jie šiek tiek siejasi su toliau ar prieš tai esančiu skyriumi. Manome, kad ne tik tie puslapiai, bet ir visas vadovėlis turėtų paskatinti mokinius domėtis matematika.

TURINYS

Metų laikai

Baigėsi vasara. Ir vėl ruduo, rudens pirmasis mėnuo — rugsėjis. Po to ateis žiema, pavasaris, vasara... Metų laikus visų pirma lemia Žemės sukimasis aplink Saulę ir Žemės ašies posvyris į sukimosi plokštumą. Žemės ašis, apie kurią sukasi Žemė, su plokštuma, kurioje yra Žemės sukimosi apie Saulę trajektorija, sudaro apie $66{,}33^\circ$ kampą.



Lietuva yra šiaurės pusrutulyje (ji brėžinyje pažymėta žaliu taškeliu). Gruodžio 22 dieną Lietuvoje (ir visame šiaurės pusrutulyje) Saulė virš horizonto pakyla žemiausiai (lyginant su kitomis metų paromis). Todėl tą parą šviesus paros metas yra trumpiausias, o tamsus — ilgiausias. Rugsėjo 23 dieną Lietuvoje Saulė virš horizonto būna lygiai tiek, kiek ir žemiau jo — dienos ilgumas lygus nakties ilgumui.

Žemė aplink Saulę apsisuka per 365,25 paros. Sutarta, kad metus sudaro 365 paros, o kas ketvirti metai — 366 paros.

Štai pora lygybių, susijusių su metų dienų skaičiumi 365:

$$365 = 10^2 + 11^2 + 12^2,$$

$$365 = 13^2 + 14^2.$$

Vadinasi, teisinga ir graži lygybė

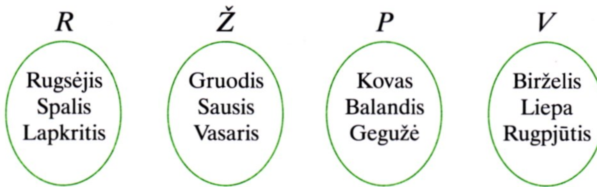
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

1 AIBĖS

1.1. Aibės. Aibių sąjunga ir sankirta

Aibės ir jų elementai

Metų laikus pažymėkime jų pavadinimų pirmosiomis raidėmis (ruduo — R, žiema — $\check{Z}$, pavasaris — P, vasara — V) ir pavaizduokime tokiomis diagramomis:



Galima sakyti, kad mėnesius surašėme tam tikrą savybę turinčiomis grupėmis — *aibėmis*. Iš viso gavome 4 aibes, kurių kiekvieną sudaro *3 elementai*.

Aibė — tam tikrą savybę turinčių objektų rinkinys. Aibės elementai — aibę sudarantys objektai.

Aibes matematikoje įprasta žymėti didžiosiomis raidėmis, o jų elementus rašyti riestiniuose skliaustuose. Pavyzdžiui, diagramomis pavaizduotas aibes galime užrašyti taip:

$R = \{$rugsėjis, spalis, lapkritis$\}$, $\quad \check{Z} = \{$gruodis, sausis, vasaris$\}$,

$P = \{$kovas, balandis, gegužė$\}$, $\quad V = \{$birželis, liepa, rugpjūtis$\}$.

Jei elementas a priklauso aibei A, tai rašome $a \in A$; jei elementas b nepriklauso aibei A, tai rašome $b \notin A$. Pavyzdžiui: Rugsėjis $\in R$, Spalis $\notin V$.

? Pavaizduokite diagramomis ir užrašykite tokias aibes:
aibė I — 31 dieną turintys mėnesiai; aibė K — 30 dienų turintys mėnesiai;
aibė T — mažiau kaip 30 dienų turintys mėnesiai; aibė M — visų mėnesių aibė.

2005

	SAUSIS	VASARIS	KOVAS	BALANDIS	GEGUŽĖ	BIRŽELIS
P	3 10 17 24 31	7 14 21 28	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30	6 13 20 27
A	4 11 18 25	1 8 15 22	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24 31	7 14 21 28
T	5 12 19 26	2 9 16 23	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25	1 8 15 22 29
K	6 13 20 27	3 10 17 24	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30
P	7 14 21 28	4 11 18 25	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24
Š	1 8 15 22 29	5 12 19 26	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25
S	2 9 16 23 30	6 13 20 27	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26

	LIEPA	RUGPJŪTIS	RUGSĖJIS	SPALIS	LAPKRITIS	GRUODIS
P	4 11 18 25	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26
A	5 12 19 26	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27
T	6 13 20 27	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28
K	7 14 21 28	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29
P	1 8 15 22 29	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30
Š	2 9 16 23 30	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24 31
S	3 10 17 24 31	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25

Mūsų sudarytos aibės turi baigtinį elementų skaičių — tokios aibės vadinamos *baigtinėmis*. Yra aibių, kurios turi be galo daug elementų — jos vadinamos *begalinėmis*. Aibė neturinti nei vieno elemento vadinama *tuščiąja*. Tuščioji aibė žymima $\varnothing$.

Aibių sąjunga

Imkime aibes:

$V = \{$birželis, liepa, rugpjūtis$\}$,

$K = \{$balandis, birželis, rugsėjis, lapkritis$\}$.

- Aibės V elementai — vasaros mėnesiai.
- Aibės K elementai — 30 dienų turintys mėnesiai.

Sudarykime aibę, kurios elementai būtų *arba* vasaros mėnesiai, *arba* 30 dienų turintys mėnesiai, t. y. aibę, sudarytą iš V ir K visų elementų. Tą aibę galima gauti prie V elementų prijungus tuos K elementus, kurie neįeina į V. Akivaizdu, kad prie V elementų reikia prijungti visus K elementus, išskyrus birželį, nes jis jau yra aibėje V. Tokį aibių junginį vadinsime *aibių sąjunga* ir žymėsime ženklu $\cup$.

Taigi

$V \cup K = \{$birželis, liepa, rugpjūtis, balandis, rugsėjis, lapkritis$\}$.

Aibė, sudaryta iš visų elementų, įeinančių ***arba*** *į aibę A,* ***arba*** *į aibę B (į bent vieną iš tų aibių), vadinama aibių A ir B sąjunga. Ją žymime* $A \cup B$.

Galima sujungti ir daugiau negu dvi aibes. Pavyzdžiui, rudens (R), žiemos ($\check{Z}$), pavasario (P) ir vasaros (V) mėnesių aibių sąjunga lygi metų (M) mėnesių aibei:

$R \cup \check{Z} \cup P \cup V = M$.

Aibių sankirta

Sudarykime aibę, kurios elementai būtų vasaros mėnesiai, turintys 30 dienų, t. y. aibę, sudarytą iš V ir K *bendrųjų* elementų. Matome, kad ir į aibę V, ir į aibę K įeina tik birželis (vienintelis vasaros mėnuo, turintis 30 dienų). Todėl mūsų ieškomoje aibėje bus tik vienas elementas. Sakome, kad radome aibių V ir K *sankirtą*. Ji žymima ženklu $\cap$.

Taigi

$V \cap K = \{$birželis$\}$.

Aibė, sudaryta tik iš tų elementų, kurie įeina ***ir*** *į aibę A,* ***ir*** *į aibę B (į abi aibes), vadinama aibių A ir B sankirta. Ją žymime* $A \cap B$.

Galima sukirsti ir daugiau negu dvi aibes. Pavyzdžiui,

$M \cap R \cap K = \{$rugsėjis, lapkritis$\}$.

? Pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų:
1) $\check{Z} \cup \varnothing = ?$; 2) $P \cap \varnothing = ?$;
$\check{Z}$ — žiemos mėnesių aibė; P — pavasario mėnesių aibė.

Pratimai ir uždaviniai

Aibės ir jų elementai

1. Nusakykite žodžiais aibę.

a) $A = \{$pirmadienis, antradienis, $\ldots$, sekmadienis$\}$;

b) $B = \{$šeštadienis, sekmadienis$\}$;

c) $C = \{$trikampiai, keturkampiai, penkiakampiai, $\ldots\}$;

d) $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

e) $E = \varnothing$.

Kiek elementų turi kiekviena ši aibė?

2. Pavaizduokite aibę taškų:

a) vienodu atstumu nutolusių nuo kokios nors atkarpos galų;

b) vienodu atstumu nutolusių nuo kokio nors kampo abiejų kraštinių;

c) vienodu atstumu nutolusių nuo vieno kurio nors taško;

d) nuo vieno kurio nors taško nutolusių atstumu, ne didesniu negu 3 cm ir ne mažesniu negu 2 cm;

e) vienodu atstumu nutolusių nuo kokių nors dviejų susikertančių tiesių;

f) vienodu atstumu nutolusių nuo kokių nors dviejų lygiagrečių tiesių.

3. Pasakykite bendrą savybę aibės taškų, kurie yra:

a) atkarpos vidurio statmenyje;

b) kampo pusiaukampinėje;

c) ant apskritimo.

4. Aibė A — visų lygiagretaĩnių aibė. Ar priklauso šiai aibei:

a) kvadrãtas? b) trìkampis? c) ròmbas? d) trapècija?



Lygiagretainiù vadinamas keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios.

Trapecija vadinamas keturkampis, kurio dvi kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi — ne.

---

5. Pasakykite, ar:

a) visi lygiašoniai trikampiai priklauso visų trikampių aibei;

b) visi lygiašoniai trikampiai priklauso visų lygiakraščių trikampių aibei;

c) visi stačiãkampiai priklauso visų keturkampių aibei;

d) visi stačiãkampiai priklauso visų kvadratų aibei;

e) visi kvadratai priklauso visų stačiakampių aibei.

6. Nustatykite, ar aibės A ir B turi bendrų elementų, t. y. tokių elementų, kurie įeina į abi aibes.

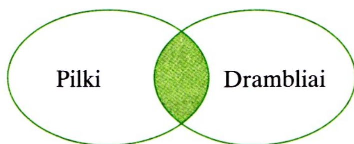
a) A — visų lygiagretainių aibė, B — visų trapecijų aibė;

b) A — visų rombų aibė, B — visų kvadratų aibė;

c) A — visų lygiašonių trikampių aibė, B — visų stačiųjų trikampių aibė.

Jei aibės A ir B turi bendrų elementų, tai nurodykite juos.

7. Pasakymas „Yra pilkų dramblių“ aibių kalba reiškia, kad „pilkųjų“ aibė ir „dramblių“ aibė turi bendrų elementų. Tai galima pavaizduoti diagramà:



Pavaizduokite diagrama sakinį:
a) visi drambliai yra pilki; b) nėra pilkų dramblių.

8. Sakinyje

Ne visa auksas, kas blizga

išskirkite aibes, apie kurias kalbama. Pavaizduokite tą sakinį diagrama (panašiai kaip 7 uždavinyje).
Kuris teiginys tikrai teisingas?
A Auksinis žiedas blizga
B Blizganti grandinėlė pagaminta iš aukso
C Egzistuoja blizganti apyrankė, kuri padaryta iš aukso
D Nė vienas iš teiginių **A**–**C** nėra teisingas
E Visi teiginiai **A**–**C** neteisingi

Aibių sąjunga ir sankirta

9. Raskite aibių A ir B sąjungą ir sankirtą.
a) $A = \{v, a, r, š, k, ė\}$, $B = \{r, ė, t, i, s\}$;
b) $A = \{s, a, l, d, u\}$, $B = \{k, a, r, t, u\}$.
c) $A = \{k, o, v, a, s\}$, $B = \{u, p, ė\}$.

10. Tiesėje a pažymėkite iš eilės taškus A, B, C ir D. Nurodykite aibę taškų, kurią sudaro:
a) atkarpų AC ir BD sankirta;
b) atkarpos AB ir spindulio BD sąjunga;
c) spindulių BA ir BC sankirta;
d) spindulių CA ir BD sąjunga;
e) atkarpų AB ir CD sankirta;
f) atkarpos AD ir tiesės a sąjunga.

11. Turime aibes:
A — keturkampiai, turintys bent du stačiuosius kampus,
B — trapecijos,
C — stačiakampiai,
D — rombai,
E — lygiagretainiai,
F — statieji trikampiai.
a) Kas sudaro aibę: $A \cap B$? $A \cap C$? $A \cap D$? $A \cap E$? $A \cap F$?
b) Kas sudaro aibę: $A \cup B$? $A \cup C$? $A \cup D$? $A \cup E$? $A \cup F$?
c) Nurodykite aibių poras, neturinčias bendrų elementų.

1.2. Skaičių aibės

Racionaliųjų skaičių aibė

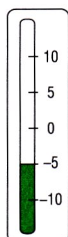
Nagrinėkime aibes, kurių elementai yra skaičiai.

Daiktams skaičiuoti vartojame natūraliuosius skaičius. Pats mažiausias natūralusis skaičius yra vienetas, o didžiausio natūraliojo skaičiaus nėra — kad ir kokį didelį natūralųjį skaičių imtume, prie jo pridėję vienetą, gausime dar didesnį. *Natūraliųjų* skaičių aibę žymėsime raide $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}.$$

Baigtinė ar begalinė natūraliųjų skaičių aibė?

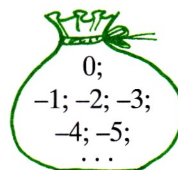
Kai kuriems dydžiams nusakyti prireikia ir neigiamųjų skaičių, pavyzdžiui:



Termometras rodo –5 laipsnius

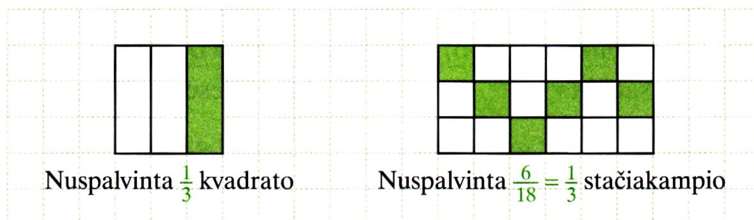
Prie natūraliųjų skaičių aibės prijungę jiems priešingus skaičius ir nulį, gauname sveikųjų skaičių aibę. *Sveikųjų* skaičių aibę žymėsime raide $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}.$$

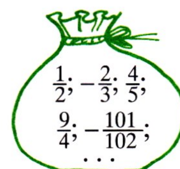


Kokie skaičiai vadinami vienas kitam priešingais?

Dydžių dalys reiškiamos trupmeniniais skaičiais. Pavyzdžiui, vieneto trečdalį atitinka trupmena $\frac{1}{3}$, du trečdalius — $\frac{2}{3}$.



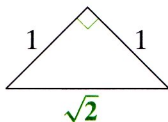
Prie sveikųjų skaičių aibės prijungę visas nesuprastinamąsias, nelygias sveikiesiems skaičiams trupmenas $\frac{m}{n}$ ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$), gauname racionaliųjų skaičių aibę. *Racionaliųjų* skaičių aibę žymėsime raide $\boldsymbol{Q}$.



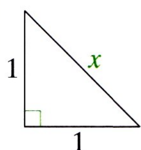
Ar bet kurį sveikąjį skaičių galima užrašyti trupmena $\frac{m}{n}$ ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$)?
Kokie skaičiai vadinami vienas kitam atvirkštiniais?

Realiųjų skaičių aibė

Ne visus dydžius galima išreikšti racionaliaisiais skaičiais. Pavyzdžiui, stačiojo trikampio, kurio statinių ilgiai lygūs 1, įžambinės ilgio negalima užrašyti trupmena $\frac{m}{n}$ ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$). Jis reiškiamas iracionaliuoju skaičiumi $\sqrt{2}$.



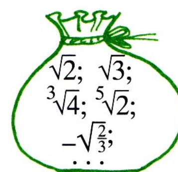
Įrodykime, kad stačiojo trikampio su statiniais, lygiais 1 ilgio vienetui, įžambinės ilgio negalima užrašyti racionaliuoju skaičiumi.



Įžambinės ilgį pažymėkime x. Pagal Pitagoro teoremą:
$x^2 = 1^2 + 1^2$,
$x^2 = 1 + 1$,
$x^2 = 2$.

1) Akivaizdu, kad nėra tokio sveikojo skaičiaus, kurį pakėlę kvadratu gautume 2. Vadinasi, x nėra sveikasis.
2) Sakykime, kad įžambinės ilgį x galima užrašyti *nesuprastinamąja* trupmena $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \boldsymbol{N}$). Tada
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \frac{m^2}{n^2} = 2, \quad m^2 = 2n^2.$$
Panagrinėkime lygybę
$$m^2 = 2n^2.$$
Kadangi $2n^2$ dalijasi iš 2, tai ir m^2 dalijasi iš 2. Vadinasi, iš 2 dalijasi ir skaičius m. Todėl atsiras toks natūralusis skaičius k, kad $m = 2k$. Tada
$$(2k)^2 = 2n^2, \quad 4k^2 = 2n^2, \quad n^2 = 2k^2.$$
Lygybė
$$n^2 = 2k^2$$
rodo, kad ir skaičius n dalijasi iš 2. Gavosi, kad trupmenos $\frac{m}{n}$ ir skaitiklis, ir vardiklis dalijasi iš 2. Tai reiškia, kad nesuprastinamąją trupmeną $\frac{m}{n}$ galima suprastinti (nes jos ir skaitiklis, ir vardiklis dalijasi iš 2). Vadinasi, x nėra nesuprastinamoji trupmena.
3) Įsitikinome, x negali būti nei sveikasis skaičius, nei nesuprastinamoji trupmena, vadinasi, x negali būti racionalusis.

Skaičiai, kurių negalima užrašyti pavidalu $\frac{m}{n}$ ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$), vadinami iracionaliaisiais. *Iracionaliųjų* skaičių aibę žymėsime raide $\boldsymbol{I}$.



Prie racionaliųjų skaičių aibės prijungę iracionaliųjų skaičių aibę, gauname realiųjų skaičių aibę. *Realiųjų* skaičių aibę žymėsime raide $\boldsymbol{R}$:
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}.$$

Pratimai ir uždaviniai

Natūralieji skaičiai

12. 1) Skaičių parašykite skyrių suma.

a) 51; b) 90; c) 957; d) 903; e) 10 001; f) 123 456 789.

2) Užrašykite skyrių suma skaičių, kuris būtų užrašytas tais pačiais skaitmenimis kaip ir skaičius $\overline{abc}$, tik skaitmenys eitų atvirkštine tvarka.



Natūralųjį skaičių galima užrašyti skyrių suma. Pavyzdžiui, dviženklį skaičių $\overline{ab}$ galima užrašyti taip:

$\overline{ab} = 10a + b$, čia $a = \{1; 2; 3; \ldots; 9\}, b = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.

Natūralųjį skaičių sudarantys skaitmenys skirstomi į klases. Kiekvieną klasę sudaro vienetų, dešimčių ir šimtų skyriai.

Klasės	.....	Milijardų klasė			Milijonų klasė			Tūkstančių klasė			Vienetų klasė		
Skyriai		Milijardų šimtai	Milijardų dešimtys	Milijardų vienetai	Milijonų šimtai	Milijonų dešimtys	Milijonų vienetai	Tūkstančių šimtai	Tūkstančių dešimtys	Tūkstančių vienetai	Šimtai	Dešimtys	Vienetai
Lietuva							3	6	1	0	5	3	5
Graikija						1	0	6	2	3	8	3	5
JAV					2	7	8	0	5	8	8	8	1
Kinija				1	2	7	3	1	1	1	2	9	0

Lentelėje pateikti kai kurių pasaulio valstybių gyventojų skaičiai 2001 m.

13. Didėjimo tvarka surašykite duotųjų skaičių bendrųjų kartotinių aibę.

a) 2 ir 4; b) 2 ir 3; c) 4 ir 10; d) 3 ir 4; e) 2; 3 ir 4; f) 4; 5 ir 6.

Nurodykite formulę, kuria remiantis būtų galima apskaičiuoti bet kurį tos aibės elementą.



d) Didėjimo tvarka surašykime skaičių 3 ir 4 bendrųjų kartotinių aibę.

Natūralusis skaičius k yra natūraliųjų skaičių a ir b bendrasis kartotinis, jei k dalijasi ir iš a, ir iš b be liekanos.

Skaičiaus 3 kartotinių aibė:

$\{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; \ldots\}$, t. y. $3n, n \in \boldsymbol{N}$, pavidalo skaičiai.

Skaičiaus 4 kartotinių aibė:

$\{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; \ldots\}$, t. y. $4n, n \in \boldsymbol{N}$, pavidalo skaičiai.

Skaičių 3 ir 4 bendrųjų kartotinių aibė:

$\{12; 24; 36; \ldots\}$, t. y. $12n, n \in \boldsymbol{N}$, pavidalo skaičiai.

Atsakymas. $\{12; 24; 36; \ldots\}$; $12n$, kai $n \in \boldsymbol{N}$.

14. Arno žingsnio ilgis yra 75 cm, o Rūtos — 60 cm. Abu jaunuoliai vienu metu iš tos pačios vietos pradeda eiti ta pačia kryptimi.

a) Kas kiek metrų jų žingsniai sutaps?

b) Kiek žingsnių nužengs Arnas ir kiek Rūta, kai jų žingsniai sutaps pirmą kartą?

15. a) Uostamiestyje prasideda trys turistiniai reisai motorlaiviais. Vieno reiso trukmė 15 dienų, antro — 20 dienų, trečio — 24 dienos. Šiandieną iš uosto išplaukė motorlaiviai visais trimis reisais. Po kiek dienų jie vėl pirmą kartą išplauks kartu (sugrįžę į uostą, motorlaiviai kitą dieną išplaukia į reisą)?

b) Lietuvoje Seimo rinkimai vyksta kas 4 metai, o Prezidento — kas 5 metai. Kas keleri metai Seimo ir Prezidento rinkimai vyksta tais pačiais metais? Kaip pasikeistų atsakymas, jei Prezidentą rinktume kas 6 metai?

16. 1) Iš skaičių 102, 103, 104, 116, 150, 258, 260, 333, 396, 111 111, 111 222, 1 111 115, 1 112 220 išrinkite tuos, kurie dalijasi be liekanos iš:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6; f) 9; g) 10.

2) Natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 2 be liekanos vadinami *lyginiais*, kurie nesidalija — *nelyginiais*. Liginius skaičius galima užrašyti formule $2n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Formule užrašykite nelyginius skaičius.



Jei skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3 (iš 9), tai ir pats skaičius dalijasi iš 3 (iš 9).

Jei skaičiaus paskutinių dviejų skaitmenų sudaromas skaičius dalijasi iš 4, tai ir pats skaičius dalijasi iš 4.

Jei skaičius dalijasi ir iš m, ir iš n, o m ir n neturi bendrųjų daliklių, tai pats skaičius dalijasi iš $m \cdot n$.

---

17. Koks mažiausias natūralusis skaičius dalijasi iš skaičių:

a) 1, 2, 3? b) 1, 2, 3, 4? c) 1, 2, 3, 4, 5, 6? d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

18. Iš skaičių 11, 15, 27, 29, 100, 101, 102, 103 išrinkite *pirminius* skaičius.



Skaičius $n \in \boldsymbol{N}$ ($n \geqslant 2$) vadinamas pirminiu, jei jis dalijasi tik iš vieneto ir savęs.

Tikrinant, ar skaičius a neturi kitų daliklių, išskyrus 1 ir a, galima skaičių a dalyti iš $2, 3, \ldots, a-1$. Bet visiškai akivaizdu, kad pakanka dalyti iš skaičių, ne didesnių kaip $\frac{a}{2}$. Pamąstykite, o gal pakanka dalyti iš skaičių, ne didesnių kaip $\sqrt{a}$? Pamąstykite, o gal pakanka dalyti tik iš pirminių, ne didesnių kaip $\sqrt{a}$?

---

19. Surašykite visus pirminius skaičius, mažesnius už 100.



Surašykite visus skaičius nuo 2 iki 100 (pavyzdžiui, į lentelę 10×10). Skaičius 2 yra pirminis — jis dalijasi iš 1 ir iš 2. Išbraukite visus kitus 2-jų kartotinius, t. y. skaičius 4, 6, 8, ... Pirmasis po 2 neišbrauktas skaičius yra pirminis — tas skaičius yra 3. Išbraukite visus kitus 3-jų kartotinius, t. y. skaičius 6, 9, 12, ... Ir t. t. (Gausite vadinamąjį Eratosteno rėtį.)

---

20. Skaičių išskaidykite pirminiais dauginamaisiais.
a) 60; b) 90; c) 2310; d) 15 912.



Kiekvieną sudėtinį skaičių galima vieninteliu būdu išreikšti pirminių dauginamųjų sandauga. (Šis teiginys vadinamas pagrindine aritmetikos teorema.)
Pavyzdžiui: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$.
d) Išskaidykime pirminiais dauginamaisiais skaičių 15 912.
Ieškome skaičiaus 15 912 pirminių daliklių, pradėdami nuo mažiausio. Kadangi skaičiaus paskutinis skaitmuo yra lyginis, tai 15 912 dalijasi iš 2:
$15\,912 = 7956 \cdot 2$.
Skaičius 7956 vėl dalijasi iš 2:
$15\,912 = (3978 \cdot 2) \cdot 2$.
Skaičius 3978 vėl dalijasi iš 2:
$15\,912 = (1989 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 2$.
Skaičius 1989 nesidalija iš 2. Tikriname, ar jis nesidalija iš kito mažiausio (didesnio už 2) pirminio skaičiaus, t. y. iš 3. Kadangi $1 + 9 + 8 + 9 = 27$, t. y. skaičiaus 1989 skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai jis dalijasi iš 3:
$15\,912 = (663 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Skaičius 663 irgi dalijasi iš 3:
$15\,912 = (221 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Skaičius 221 nesidalija iš 3. Kitas pirminis skaičius 5, bet 221 nesidalija iš 5.
221 nesidalija ir iš pirminių 7 ir 11, bet dalijasi iš 13:
$15\,912 = (17 \cdot 13) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Skaičius 17 yra pirminis. Skaidinį galima užrašyti trumpiau:
$15\,912 = 17 \cdot 13 \cdot 3^2 \cdot 2^3$.
Šią procedūrą trumpai galima užrašyti taip:

15912	2
7956	2
3978	2
1989	3
663	3
221	13
17	17
1	

Atsakymas. $15\,912 = 17 \cdot 13 \cdot 3^2 \cdot 2^3$.

21. Raskite skaičių didžiausiąjį bendrąjį daliklį (DBD).
a) 24 ir 36; b) 30 ir 48; c) 54 ir 72; d) 15 912 ir 26 460; e) 72; 120 ir 168.



Dviejų (ar daugiau) natūraliųjų skaičių didžiausiuoju bendruoju dalikliu vadinamas toks didžiausias natūralusis skaičius, iš kurio dalijasi tie natūralieji skaičiai.

Raskime DBD(100, 120).
I būdas. Raskime visus skaičiaus 100 daliklius:
1, 2, 4, 5, 10, **20**, 25, 50, 100.
Raskime visus skaičiaus 120 daliklius:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, **20**, 30, 40, 60, 120.
Didžiausiasis bendrasis daliklis yra 20, t. y. DBD(100, 120) = 20.
II būdas. DBD galima ieškoti ir skaidant kiekvieną skaičių pirminiais dauginamaisiais:

100	2	120	2
50	2	60	2
25	5	30	2
5	5	15	3
1		5	5
		1	

$100 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{5} \cdot 5$,
$120 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{5}$.

Randame *bendruosius* abiejų skaidinių daugiklius: 2, 2, 5. Šių daugiklių sandauga ir lygi didžiausiajam bendrajam dalikliui: $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.
Ieškant DBD, patogu skaidinius užrašyti taip:

$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^2$,

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$;

$\text{DBD}(100, 120) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$.

III būdas. DBD galima rasti remiantis tokiu algoritmu (Euklido algoritmas):

120 : 100 = 1 (liekana **20**), $(120 = 1 \cdot 100 + \mathbf{20})$;

100 : **20** = 5 (liekana 0), $(100 = 5 \cdot \mathbf{20} + 0)$.

Pirmoji nelygi nuliui liekana ir yra tų skaičių DBD.

Atsakymas. DBD(100, 120) = 20.

---

22. Raskite skaičių mažiausiąjį bendrąjį kartotinį (MBK).
a) 6 ir 8; b) 24 ir 36; c) 54 ir 72; d) 15 912 ir 26 460; e) 72; 120 ir 168.



Dviejų (ar daugiau) natūraliųjų skaičių mažiausiuoju bendruoju kartotiniu vadinamas toks mažiausias natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš tų natūraliųjų skaičių.
Raskime MBK(100, 120).
I būdas. Raskime skaičiaus 100 kartotinius:
100; 200; 300; 400; 500; **600**; 700; 800; 900; 1000; 1100; **1200**; ...
Raskime skaičiaus 120 kartotinius:
120; 240; 360; 480; **600**; 720; 840; 960; 1080; **1200**; ...
Mažiausiasis bendrasis kartotinis yra 600, t. y. MBK(100, 120) = 600.

II būdas. MBK galima ieškoti ir skaidant kiekvieną skaičių pirminiais dauginamaisiais:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 100 = 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{5}, \\ 120 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 5. \end{array}$$

Iš abiejų skaidinių paimame tuos dauginamuosius, kurie yra bent viename skaidinyje: 2, 2, 2, 3, 5, 5. Jų sandauga ir lygi mažiausiajam bendrajam kartotiniui: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 600$.
Ieškant MBK, patogu skaidinius užrašyti taip (žr. 21 uždavinį, II būdą):

$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^2$,

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$;

$\text{MBK}(100, 120) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600$.

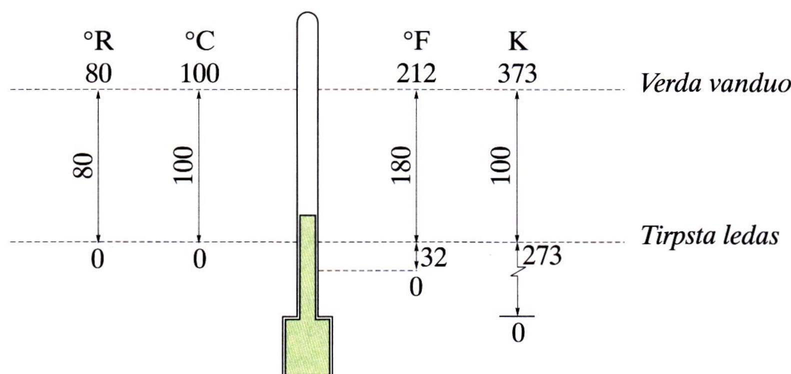
Atsakymas. MBK(100, 120) = 600.

---

23. Kambariuko grindų matmenys yra 224 cm × 154 cm. Grindis reikia iškloti kvadratinėmis plytelėmis. Kokių didžiausių matmenų gali būti plytelės, kad jų nereikėtų pjaustyti?

Sveikieji skaičiai

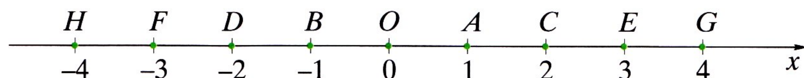
24. Temperatūrą mes matuojame Celsijaus laipsniais. Mums įprasti termometrai turi Celsijaus skalę, kurioje 0 žymi ledo tirpimo temperatūrą, o 100 — vandens virimo temperatūrą. Yra ir kitų temperatūros skalių. Pavyzdžiui, Reomiūro skalėje 0 irgi žymi ledo tirpimo temperatūrą, o vandens virimo temperatūrą žymi skaičius 80. Fahrenheitas skalės nuliu pasirinko žemiausią 1724 metų temperatūrą Šiaurės Airijoje, ledo tirpimo temperatūrą žymi 32 Fahrenheito laipsniai, o vandens virimo — 212°F. Kelvino skalėje ledo tirpimo temperatūrą atitinka 273, o vandens virimo — 373 kelvinai, 0 kelvinų žymi žemiausią įmanomą temperatūrą (žr. pav.).



a) Mūsų termometras rodo 30°C. Kiek rodys kitų skalių termometrai?

b) Termometras rodo 13 kelvinų. Kiek rodys mūsų termometras?
c) Formule užrašykite ryšį tarp temperatūros kelvinais T_K ir temperatūros Celsijaus laipsniais T_C.

25. Kiekvieną sveikąjį skaičių galima pažymėti skaičių tiesės tašku, pavyzdžiui:

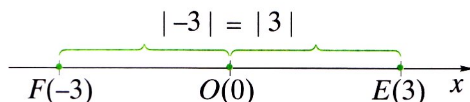


Pavaizduotoje tiesėje pažymėti taškai A, B, C, D, E, F, G, H, O.
a) Užrašykite taškų C, E, G, B, F, H koordinates.
b) Kam lygūs moduliai: $|5|$; $|7|$; $|131|$; $|-5|$; $|-7|$; $|-131|$?
Pabaikite sakinius:
Teigiamojo skaičiaus modulis lygus ...
Neigiamojo skaičiaus modulis lygus ...
Priešingųjų skaičių moduliai ...
c) Kam lygus atstumas OG? OF? AE? BH? CD? GF?
d) Užrašykite formulę, kuria remiantis būtų galima apskaičiuoti atstumą tarp bet kurių dviejų skaičių tiesės taškų $M(m)$ ir $N(n)$, kai žinomos tų taškų koordinatės m ir n.



Taškas O pavaizduotoje skaičių tiesėje atitinka skaičių 0, rašoma $O(0)$; taškas A atitinka 1, rašoma $A(1)$; taškas D atitinka skaičių -2, t. y. $D(-2)$. Skaičiaus modulis parodo, kiek tą skaičių atitinkantis skaičių tiesės taškas yra nutolęs nuo 0 žyminčio taško, pavyzdžiui:

$|3| = OE = 3$,
$|-3| = OF = 3$.



Racionalieji skaičiai

26. a) Užrašykite skaičius trupmena su vardikliu, lygiu 180.

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{10}$.

b) Kaip manote, kuri trupmena yra didesnė:

$$\frac{n}{n+1} \text{ ar } \frac{n+1}{n+2}?$$

Paaiškinkite, kodėl.

c) Trupmenas parašykite nesuprastinamosiomis paprastosiomis trupmenomis.

$\frac{4}{6}$; $\frac{9}{111}$; $\frac{150}{495}$; $\frac{374\,220}{261\,954}$.

d) Paprastąsias trupmenas parašykite dešimtainėmis.

$\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{23}{4}$; $\frac{11}{1221}$; $\frac{16}{52}$; $\frac{1}{100}$.



Racionalųjį skaičių galima užrašyti įvairiai, pavyzdžiui:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \cdots = \frac{-2}{-4} = 0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}5(0) = \cdots$$

a) $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a:n}{b:n}$, $n \neq 0$. Trupmenos skaitiklį ir vardiklį dauginant (dalijant) iš to paties, nelygaus 0, skaičiaus, trupmenos reikšmė nepasikeičia.
c) Prastinant trupmeną, kai skaitiklis ir vardiklis yra dideli skaičiai, patogu ir skaitiklį, ir vardiklį išskaidyti pirminiais dauginamaisiais.
d) $\frac{a}{b} = a : b$. Dalykite kampu, kol pastebėsite pasikartojančių skaitmenų grupę (vadinamąjį periodą), pavyzdžiui: $\frac{10}{11} = 0{,}909090... = 0{,}(90)$.

```
 10  |11
-           
  0   0,9090...
 ---
 100
-
  99
 ---
   10
  -
    0
   ---
   100
  -
    99
   ---
     10
    -
      0
     ---
     ...
```

27. a) Baigtines dešimtaines trupmenas parašykite paprastosiomis.
$0{,}6$; $0{,}75$; $0{,}07$; $0{,}999$; $1{,}2$; $1{,}25$; $-3{,}1$; $-0{,}01$.
b) Begalines periodines dešimtaines trupmenas parašykite paprastosiomis.
$0{,}(3)$; $0{,}(6)$; $2{,}(7)$; $0{,}7(3)$; $0{,}9(1)$; $021(34)$.



Kiekvieną racionalųjį skaičių ($\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$) galima parašyti dešimtainiu pavidalu, t. y. paprastąją trupmeną užrašyti jai lygia dešimtaine trupmena. Tai nesunku padaryti dalijant, pavyzdžiui:

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5;$$
$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666... = 0{,}(6);$$
$$\frac{12}{7} = 12 : 7 = 1{,}(714285).$$

Kaip matome, gauname arba baigtinę dešimtainę trupmeną, arba begalinę periodinę dešimtainę trupmeną.
Apskritai yra teisingas toks teiginys:
Kiekvieną racionalųjį skaičių galima užrašyti arba baigtine, arba begaline periodine dešimtaine trupmena.
Ir atvirkščiai:
Kiekvieną baigtinę ir begalinę periodinę dešimtainę trupmeną galima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.
b) Parašykime $0{,}(3)$ paprastąja trupmena.

Pažymėkime

$$x = 0,(3), \quad (1)$$
$$x = 0,333... \quad (2)$$

Padauginkime abi (2) lygybės puses iš 10:

$$10x = 3,333... \quad (3)$$

Iš (3) lygybės panariui atimkime (2):

$$\begin{array}{r} 10x = 3,333... \\ - \quad x = 0,333... \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$

Iš šios lygybės randame x: $x = \frac{3}{9}$, $x = \frac{1}{3}$.

Atsakymas. $0,(3) = \frac{1}{3}$.

---

28. a) Pirmiausia raskite 1%, o po to 15% skaičiaus:

$20; \quad 75; \quad 110; \quad \frac{3}{5}; \quad 2\frac{1}{3}.$

Suformuluokite taisyklę, kaip rasti dydžio A nurodytą skaičių p procentų.

b) Pirmiausia raskite 1‰, o po to 21‰ skaičiaus:

$10\,000; \quad 2200; \quad 222; \quad \frac{15}{4}.$

Suformuluokite taisyklę, kaip rasti dydžio A nurodytą skaičių p promilių.



Skaičiaus dalims žymėti dažnai vartojami ne tik trupmeniniai skaičiai, bet ir kiti dydžiai: pròcentai, rečiau — pròmilės.

Tam tikro dydžio vienas procentas (1%) *— tai to dydžio viena šimtoji dalis.*

Pavyzdžiui:

1% skaičiaus 100 yra 1, 1% skaičiaus 50 yra $\frac{1}{2}$,

5% skaičiaus 100 yra 5, 5% skaičiaus 50 yra $\frac{5}{2}$.

Tam tikro dydžio viena promilė (1‰) *— tai to dydžio viena tūkstantoji dalis.*

Pavyzdžiui:

1‰ skaičiaus 1000 yra 1, 1‰ skaičiaus 100 yra 0,1,

7‰ skaičiaus 1000 yra 7, 7‰ skaičiaus 100 yra 0,7.

---

29. Skaičius a sudaro $\frac{3}{7}$ skaičiaus b. Raskite:
a) skaičių a, jei $b = 2401$; b) skaičių b, jei $a = 57$; c) skaičių a ir b santykį.

30. Skaičius $a = 1{,}25b$. Be to, $a, b > 0$.
1) Kuris skaičius didesnis (a ar b)? 2) Kiek procentų didesnis?
3) Raskite skaičių a, jei $b = 23$. 4) Raskite skaičių b, jei $a = 11$.

31. Metų pradžioje įmonės turtas buvo įvertintas 1 425 000 Lt. Apskaičiuokite įmonės turtą po metų, jei jis per metus:
a) padidėjo 10%; b) sumažėjo 10%.



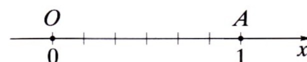
Miestelyje gyvena 1500 žmonių. Apskaičiuokime, kiek miestelyje bus gyventojų po 10 metų, jei per tą laikotarpį gyventojų:
a) padidės 5%; b) sumažės 20%.
I būdas. Randame 1% miestelio gyventojų (1500) skaičiaus:
1% sudaro $\frac{1500}{100} = 15$ gyventojų.
Randame 5% miestelio gyventojų skaičiaus:
$15 \cdot 5 = 75$ gyventojai.
Randame 20% miestelio gyventojų skaičiaus:
$15 \cdot 20 = 300$ gyventojų.
Po 10 metų miestelyje gyvens: a) $1500 + 75 = 1575$ gyventojai;
b) $1500 - 300 = 1200$ gyventojų.
II būdas. Sakyti:
- padidėjo 5% — tai tas pats, kas sakyti *padidėjo* $1 + 0{,}05 = 1{,}05$ karto;
- sumažėjo 20% — tai tas pats, kas sakyti *padidėjo* $1 - 0{,}2 = 0{,}8$ karto, bet geriau sakyti sumažėjo $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ karto.

Todėl:
a) $1500 \cdot 1{,}05 = 1575$;
b) $1500 \cdot 0{,}8 = 1200$; arba $1500 : 1{,}25 = 1200$.

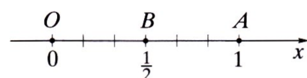
---

32. Panagrinėkime, kaip racionalųjį skaičių galima pažymėti skaičių tiesės tašku. Pažymėkime, pavyzdžiui, skaičių tiesėje tašką, atitinkantį $\frac{1}{2}$.

1) Nubrėžkime skaičių tiesę, joje pažymėkime $O(0)$ ir $A(1)$. Mastelį (vienetinės atkarpos ilgį) laikykime lygiu sąsiuvinio 6 langelių ilgiui.

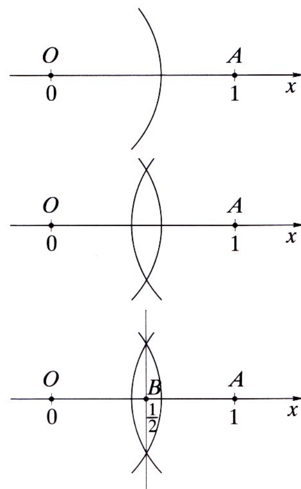


Akivaizdu, kad taškas $B(\frac{1}{2})$ bus atkarpos OA vidurio taškas, t. y. $OB = BA = \frac{1}{2}$. Aišku, kad taško B vietą nesunku rasti skaičiuojant langelius.



Jei langelių nėra, tai nesunku padaryti liniuote su padalomis.
O kaip pažymėti taško B vietą, jei nėra langelių ir neturime liniuotės su padalomis? Tai galima padaryti skriestuvu ir liniuote be padalų. Daroma taip.

- Skriestuvo kojelę su adatėle įremkime į 0 žymintį tašką. Kita kojele brėžkime lankelį spinduliu, didesniu kaip pusė vienetinės atkarpos ilgio.
- Skriestuvo kojelę su adatėle įremkime į 1 žymintį tašką. Kita kojele tuo pačiu spinduliu brėžkime kitą puslankį taip, kad abu puslankiai kirstųsi.
- Per puslankių susikirtimo taškus liniuote brėžkime tiesę. Tiesė kerta skaičių tiesę taške B, kuris yra atkarpos OA vidurys. Taigi $B(\frac{1}{2})$.

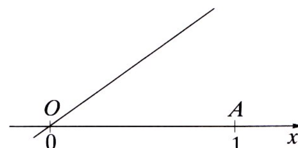


a) Įrodykite, kad taip gautas taškas yra ieškomasis.
b) Paaiškinkite, kaip skriestuvu ir liniuote galima pažymėti skaičius: $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$.

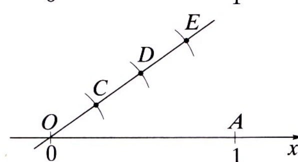
2) Pažymėkime skaičių tiesėje tašką, atitinkantį $\frac{1}{3}$.
Šiuo atveju atkarpą OA tenka dalyti į 3 lygias dalis. Tai nesunku padaryti skaičiuojant langelius arba liniuote su padalomis.



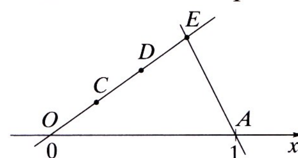
O kaip tai padaryti, jei turime tik liniuotę be padalų ir skriestuvą?
- Iš taško O brėžiame spindulį, nesutampantį su skaičių tiese.



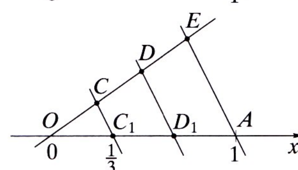
- Skriestuvu tame spindulyje pažymime 3 taškus C, D ir E taip, kad $OC = CD = DE$.



- Per taškus E ir A brėžiame tiesę.



- Per taškus C ir D brėžiame tieses, lygiagrečias su tiese EA. Tų tiesių ir skaičių tiesės susikirtimo taškus pažymėkime C_1 ir D_1. Taškas C_1 yra ieškomasis, t. y. $C_1(\frac{1}{3})$.



c) Įrodykite, kad $OC_1 = C_1D_1 = D_1A = \frac{1}{3}$.
d) Paaiškinkite, kaip skriestuvu ir liniuote galima pažymėti skaičius: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{11}{111}$.

33. Skaičių parašykite standartine išraiška.

1) a) 5000; b) 3 milijonai; c) 2,7 milijardo; d) 0,07;
   e) 27 dešimttūkstantosios; f) 0,0000000000841.

2) a) Atstumas iki artimiausios žvaigždės yra 41 100 000 000 000 000 m.
   b) Saulės masė yra 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.
   c) Elektrono masė yra 0,000000000000000000000000000000911 kg.
   d) Vandenilio atomo elektrono sukimosi apie branduolį periodas yra 0,000000000000000015 s.
   e) Vidutinio žmogaus masė yra 75 kg.

3) Kokių skaičių eilė yra neigiamasis skaičius? yra teigiamasis skaičius? lygi nuliui?



Labai dideli ir maži teigiamieji skaičiai dažnai rašomi standartine išraiška: $a \cdot 10^n$, čia $1 \leqslant a < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

n vadinamas skaičiaus eile.

Pavyzdžiui:

$230\,000\,000 = 2{,}3 \cdot 10^8$; $0{,}000000023 = 2{,}3 \cdot 10^{-8}$.

---

34. a) Natūralųjį skaičių sudarantys skaitmenys skirstomi į klases (žr. 12 uždavinį): vienetų, tūkstančių, milijonų, milijardų, ... O kaip vadinasi toliau einančios klasės? Kaip perskaityti didelį skaičių, pavyzdžiui, 18 446 744 073 709 551 616?
Patyrinėję lentelę, pabandykite tai padaryti.

10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	...	10^{100}
Tūkstantis	Milijonas	Bilijonas (Milijardas)	Trilijonas	Kvadrilijonas	Kvintilijonas		Gugolas

b) Nusakant dalinius ir kartotinius matavimo vienetus, vartojami specialūs matavimo vienetų priešdėliai. Lentelėje surašyti kai kurių dešimties laipsnių specialūs pavadinimai bei simboliai.

T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	deci	centi	mili	mikro	nano	piko
10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

1) Remdamiesi lentele, paaiškinkite, ką reiškia žodžiai: *gigatona*, *nanometras*, *dekagramas*, *pikolitras*.

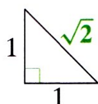
2) Išreikškite nurodytais matavimo vienetais:
   a) kilotonomis 58 000 t; 3080 t;
   b) hektolitrais 200 ℓ; 3100 ℓ;
   c) nanometrais 0,000000008 m; 0,0005 m;
   d) megatonomis 2 000 000 t; 4 050 000 t.

Iracionalieji skaičiai

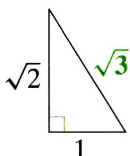
35. Pateikite iracionaliųjų skaičių pavyzdžių.

36. Sugalvokite lygtį, kurios sprendinys būtų iracionalusis skaičius.

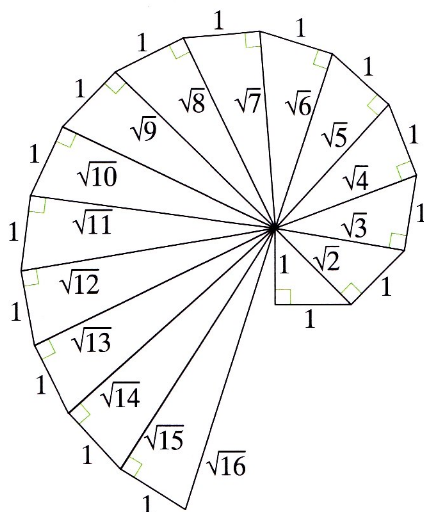
37. Stačiojo trikampio su statiniais, lygiais 1 ilgio vienetui, įžambinė lygi $\sqrt{2}$.



Stačiojo trikampio su statiniais 1 ir $\sqrt{2}$ įžambinė lygi $\sqrt{3}$ (įsitikinkite).



Stačiojo trikampio su statiniais 1 ir $\sqrt{3}$ įžambinė lygi $\sqrt{4}$ (= 2).
Stačiojo trikampio su statiniais 1 ir $\sqrt{4}$ įžambinė lygi $\sqrt{5}$.
Ir t. t.
Pavaizduokime tuos trikampius viename brėžinyje:

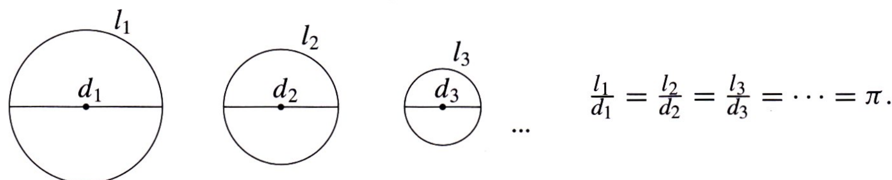


Šis brėžinys vadinamas *Teodoro ratu*

Matome, kad, turint vienetinę atkarpą, visai paprasta nubrėžti $\sqrt{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, ilgio atkarpą.
Racionalieji ir iracionalieji skaičiai užpildo skaičių tiesę — joje laisvų vietų nebelieka. Ta tiesė dažnai vadinama realiųjų skaičių tiese.
Kaip skaičių tiesėje pažymėti iracionaliuosius skaičius $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ atitinkančius taškus?

38. Gali susidaryti įspūdis, kad visi iracionalieji skaičiai užrašomi su ženklu $\sqrt{}$.
Taip, tokių iracionaliųjų skaičių yra be galo daug, pavyzdžiui: $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.

Bet yra iracionaliųjų skaičių, kuriems žymėti paskirtos raidės. Vienas toks skaičius yra skaičius π (pi).
Kuo tas skaičius ypatingas, kad jis pažymėtas atskira raide?
Skaičius π atrastas nagrinėjant apskritimus.
Apskritimo ilgio ir jo skersmens ilgio santykis nepriklauso nuo apskritimo dydžio — jis lygus tam pačiam skaičiui. Pasirodo, tas skaičius yra iracionalusis, t. y. jo negalima užrašyti paprastąja trupmena.



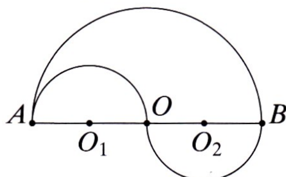
Praktiniuose skaičiavimuose naudojame skaičiaus π apytikslę reikšmę. Kuo tikslesnę π reikšmę imame, tuo tikslesnį rezultatą gauname. Šiuo metu žinomi keli milijardai skaičiaus π tikslių dešimtainių ženklų.

$\pi = 3{,}14159265358979384626433832795796435286732974563623483 5375...$

Praktiniuose skaičiavimuose π reikšmė dažniausiai laikoma apytikriai lygi 3,14, t. y. $\pi \approx 3{,}14$ arba $\pi \approx \frac{22}{7}$.

a) Kokias žinote formules, į kurias įeina skaičius π?
b) Kuri π reikšmė tikslesnė: 3,14 ar $\frac{22}{7}$?
c) Apskaičiuokite:
   1) didžiojo pusskritulio lanko ilgio ir skersmens AB ilgio santykį;
   2) mažųjų pusskritulių lankų ilgių sumos ir skersmens AB ilgio santykį;

I

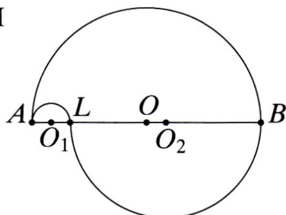


$AB = 4\,\text{cm}$, $AO = OB$;

$\frac{\smile AB}{AB} = ?$

$\frac{\smile AO + \smile OB}{AB} = ?$

II

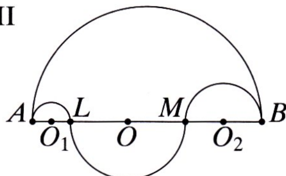


$AO = OB = 5\,\text{cm}$, $AL = 2\,\text{cm}$;

$\frac{\smile AB}{AB} = ?$

$\frac{\smile AL + \smile LB}{AB} = ?$

III



$AB = 6\,\text{cm}$, $AO_1 = 0{,}5\,\text{cm}$, $BO_2 = 1\,\text{cm}$;

$\frac{\smile AB}{AB} = ?$

$\frac{\smile AL + \smile LM + \smile MB}{AB} = ?$

39. Iš duotųjų skaičių išrinkite iracionaliuosius:
1,123123123... ; 1,112113114... ; 2,101001000... ; 2,101001000999999...
Gal galite pasakyti, pagal kokią taisyklę sudaryti tie iracionalieji skaičiai?



Realiuosius skaičius galima užrašyti dešimtainėmis trupmenomis:

- jei skaičius yra *racionalusis*, tai dešimtainė trupmena bus baigtinė arba begalinė periodinė;
- jei skaičius yra *iracionalusis*, tai dešimtainis jo pavidalas bus begalinė *neperiodinė* trupmena.

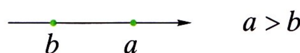
Skaičių palyginimas

40. Koks ženklas (>, <, =) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:

1) jei $a - b > 0$, tai $a \,\blacksquare\, b$?
2) jei $a - b < 0$, tai $a \,\blacksquare\, b$?
3) jei $a - b = 0$, tai $a \,\blacksquare\, b$?
4) jei $a < 0$, $b < 0$ ir $|a| < |b|$, tai $a \,\blacksquare\, b$?

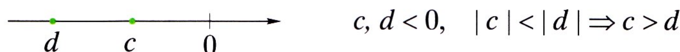


Jei skaičius a yra didesnis už skaičių b, t. y. $a > b$, tai skaičių tiesėje skaičių a atitinkantis taškas yra dešiniau už skaičių b atitinkantį tašką.



$a > b$

Iš dviejų neigiamų skaičių didesnis yra tas skaičius, kurio modulis mažesnis.



$c, d < 0, \quad |c| < |d| \Rightarrow c > d$

41. Palyginkite skaičius.

a) $-\frac{2}{7}$ ir $-\frac{3}{7}$; b) $\frac{4}{5}$ ir $\frac{4}{7}$; c) $-0{,}3$ ir $-0{,}(3)$;
d) $\frac{9}{11}$ ir $0{,}(81)$; e) $\sqrt{2}$ ir $1{,}41$; f) $-\sqrt{11}$ ir $-3\frac{1}{5}$.

42. Palyginkite laipsnius.

a) 7^3 ir 7^5; 7^{11} ir 7^{12}; $(-7)^{13}$ ir 7^{12}; -7^8 ir -7^9;
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ir $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ir $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; $0{,}91^{101}$ ir $0{,}91^{100}$;
c) 9^5 ir 8^5; 17^{100} ir $16{,}9^{100}$; $(\sqrt{3})^{51}$ ir $(1{,}(7))^{51}$;
d) $0{,}5^2$ ir $0{,}4^2$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{10}$ ir $\left(\frac{3}{8}\right)^{10}$; $(2{,}(2))^{100}$ ir $\left(2\frac{1}{5}\right)^{100}$.

43. Palyginkite standartine išraiška parašytus skaičius.

a) $1{,}3 \cdot 10^5$ ir $1{,}3 \cdot 10^7$; $2 \cdot 10^3$ ir $5 \cdot 10^3$; $-3{,}1 \cdot 10^4$ ir $-3{,}1 \cdot 10^6$;
b) $0{,}5 \cdot 10^{-1}$ ir $0{,}5 \cdot 10^{-3}$; $3 \cdot 10^{-4}$ ir $7 \cdot 10^{-4}$;
$-0{,}1 \cdot 10^{-2}$ ir $-0{,}1 \cdot 10^{-3}$;
c) $4{,}1 \cdot 10^{13}$ ir $-4{,}1 \cdot 10^{13}$; $2{,}7 \cdot 10^2$ ir $2{,}7 \cdot 10^{-2}$;
$0{,}2 \cdot 10^{10}$ ir $2{,}0 \cdot 10^{10}$.

44. Koks ženklas (> ar <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:
a) jei $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, tai $a \blacksquare b$? b) jei $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$, tai $n \blacksquare m$?
($n, m \in \boldsymbol{N}$, $n, m \geqslant 2$.)
Pateikite pavyzdžių.

Skaičių apvalinimas. Paklaidos

45. Suapvalinkite skaičius 16,00368; 75,5072; 31,4709; 508,0081; 99,9999 iki:
a) tūkstantųjų; b) šimtųjų; c) dešimtųjų; d) vienetų; e) dešimčių.



Apvalindami skaičių iki kurio nors skyriaus, visus po to skyriaus esančius skaitmenis keičiame nuliais (jeigu tie skaitmenys yra po kablelio, tai juos atmetame) ir:

- jeigu pirmas po to skyriaus esantis skaitmuo yra didesnis už 5 ar lygus 5 (5, 6, 7, 8, 9), tai paskutinį likusį skaitmenį padidiname vienetu;
- jeigu pirmas po to skyriaus esantis skaitmuo yra mažesnis už 5 (0, 1, 2, 3, 4), tai paskutinio skaitmens nekeičiame.

---

46. a) Deguonies tankis yra $1{,}43\,\mathrm{kg/m^3}$, o vandenilio tankis yra $0{,}09\,\mathrm{kg/m^3}$. Suapvalinkite šiuos skaičius iki dešimtųjų ir raskite kiekvienos gautos apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą.



Dydžio apytikslės ir tikslios reikšmių skirtumo modulis vadinamas apytikslės reikšmės absoliučiąja paklaida.
Suapvalinkime skaičių 2,19 iki dešimtųjų ir raskime gautos apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą.
$2{,}19 \approx 2{,}2$. Šios apytikslės reikšmės absoliučioji paklaida lygi:
$|2{,}2 - 2{,}19| = 0{,}01$.

Atsakymas. 0,01.

---

b) Benzino tankis yra $0{,}71\,\mathrm{g/cm^3}$, o gyvsidabrio tankis yra $13{,}55\,\mathrm{g/cm^3}$.
1) Suapvalinkite šiuos skaičius iki dešimtųjų ir raskite kiekvienos gautos apytikslės reikšmės santykinę paklaidą.
2) Gautą santykinę paklaidą išreikškite procentais.



Dydžio apytikslės reikšmės santykine paklaida vadiname absoliučiosios paklaidos ir apytikslės reikšmės santykį.
Suapvalinkime skaičių 3,13 iki dešimtųjų ir raskime gautos apytikslės reikšmės santykinę paklaidą.
$3{,}13 \approx 3{,}1$. Šios apytikslės reikšmės santykinė paklaida lygi:
$\frac{|3{,}1-3{,}13|}{3{,}1} = \frac{0{,}03}{3{,}1} = \frac{3}{310}$;
$\frac{3}{310} \approx 0{,}009677...$, o tai atitinka $0{,}9677\% \approx 1\%$.

Atsakymas. $\frac{3}{310}$ arba $\approx 1\%$.

---

47. Trys Europos valstybės pateikė tokius duomenis apie jų gyventojų vidutinį darbo užmokestį (per mėnesį):

- pirmoje valstybėje — 855 eurai;
- antroje valstybėje — 850 eurų;
- trečioje valstybėje — 900 eurų.

1) Tarp kokių skaičių, centų tikslumu, yra kiekvienos valstybės vidutinis darbo užmokestis, jei pirmos valstybės duomenys pateikti euro tikslumu, antros — dešimties eurų tikslumu, trečios — šimto eurų tikslumu?
2) Kokia kiekvienu atveju galėjo būti padaryta apvalinimo didžiausia absoliučioji ir kokia didžiausia santykinė paklaida?

48. Jau prieš 4000 metų babiloniečiai apskaičiuodavo apytiksles kvadratinių šaknų iš natūraliųjų skaičių reikšmes, naudodamiesi formule:

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

kur a yra skaičiaus $\sqrt{c}$ sveikoji dalis.
Pavyzdžiui:

$$\sqrt{200} = \sqrt{196 + 4} = \sqrt{14^2 + 4} \approx 14 + \frac{4}{2 \cdot 14} = 14\frac{1}{7} \approx 14{,}1429.$$

Skaičiuokliu gauname tokią $\sqrt{200}$ reikšmę (dešimtatūkstantųjų tikslumu):

$$\sqrt{200} \approx 14{,}1421.$$

1) Laikydami skaičiuokliu gautą reikšmę tikslia, raskite babiloniečių metodu rastos apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą. Palyginkite paklaidą su $\frac{1}{1000}$.
2) Apskaičiuokite kvadratinės šaknies apytikslę reikšmę babiloniečių metodu (tūkstantosios tikslumu), o tada skaičiuokliu:
a) $\sqrt{30}$; b) $\sqrt{69}$; c) $\sqrt{82}$; d) $\sqrt{125}$; e) $\sqrt{139}$.
Skaičiuoklio reikšmę laikydami tikslia, raskite apytikslės reikšmės, rastos babiloniečių metodu, absoliučiąją paklaidą.

1.3. Veiksmai

Veiksmų poros

Su skaičiais galime atlikti tam tikrus veiksmus — matematines operacijas:

- sudėti ir atimti,
- sudauginti ir padalyti,
- pakelti laipsniu ir traukti šaknį.

Surašykime šias veiksmų poras su pavyzdžiais lentelėje:

Sudėtis $a + b = c$ $4 + 3 = 7$	Atimtis $a = c - b$; $b = c - a$ $4 = 7 - 3$; $3 = 7 - 4$
Daugyba $a \cdot b = c$ $4 \cdot 3 = 12$	Dalyba $a = c : b$; $b = c : a$ $4 = 12 : 3$; $3 = 12 : 4$
Laipsnis $a^b = c$ $4^3 = 64$	Šaknis $a = \sqrt[b]{c}$ $4 = \sqrt[3]{64}$

Atimti, dalyti ar traukti šaknį būna sunkiau nei sudėti, dauginti ar kelti laipsniu. Todėl atimant, dalijant, traukiant šaknį pravartu pasitikrinti, ar nesuklydome:

- ar teisingai atėmėme, tikriname sudėtimi, pavyzdžiui,

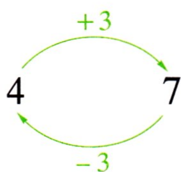
$$7 - 4 = 3, \quad \text{nes} \quad 3 + 4 = 7;$$

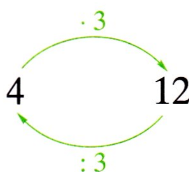
- ar teisingai padalijome, tikriname daugindami, pavyzdžiui,

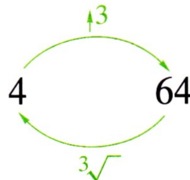
$$12 : 4 = 3, \quad \text{nes} \quad 3 \cdot 4 = 12;$$

- ar teisingai ištraukėme šaknį, tikriname keldami laipsniu, pavyzdžiui,

$$\sqrt[3]{64} = 4, \quad \text{nes} \quad 4^3 = 64.$$







Laipsnis su realiuoju rodikliu

1) Laipsnis su natūraliuoju rodikliu yra ne kas kita, kaip sandaugos su vienodais dauginamaisiais užrašas:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}, \quad \text{čia } a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Matematikoje nagrinėjami ne tik laipsniai su natūraliuoju rodikliu, bet ir laipsniai, kurių rodiklis — bet koks realusis skaičius.

2) Laipsnis su nuliniu rodikliu apibrėžiamas taip:

$$a^0 = 1, \quad \text{čia } a \neq 0.$$

Pavyzdžiui: $5^0 = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$.

3) Laipsnis su neigiamuoju sveikuoju rodikliu apibrėžiamas taip:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{čia } a \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Pavyzdžiui: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$.

? Įsitikinkite, kad teisinga tokia lygybė: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

4) Laipsnį su racionaliuoju rodikliu apibrėšime taip:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{čia } a > 0,\ m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Pavyzdžiui: $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5^1} = \sqrt{5}$; $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$.

Apskritai galima apibrėžti laipsnį su bet kuriuo (realiuoju) rodikliu:

$$a^r, \quad a > 0, \quad r \in \boldsymbol{R}.$$

Pavyzdžiui, $x = 3^{\sqrt{2}}$ yra skaičius, tenkinantis nelygybes

$$3^1 < x < 3^2,$$
$$3^{1,4} < x < 3^{1,5},$$
$$3^{1,41} < x < 3^{1,42},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Logaritmas

Sumos $a + b = c$ dėmenis randame atimdami: $a = c - b$, $b = c - a$.
Sandaugos $a \cdot b = c$ dauginamuosius randame dalydami: $a = c : b$, $b = c : a$.
Kai turime laipsnį $a^b = c$, tai laipsnio pagrindą a randame traukdami b-tojo laipsnio šaknį: $a = \sqrt[b]{c}$.
Šiomis savybėmis remiamės spręsdami lygtis, pavyzdžiui:

$$x + 3 = 7, \qquad 4x = 12, \qquad x^3 = 64,$$
$$x = 7 - 3, \qquad x = 12 : 4, \qquad x = \sqrt[3]{64},$$
$$x = 4; \qquad x = 3; \qquad x = 4.$$

O kaip rasti lygties $a^x = c$ (kur a ir c — skaičiai, x — nežinomasis) sprendinį? Imkime, pavyzdžiui, lygtį

$$4^x = 64.$$

Akivaizdu, kad

$$x = 3, \quad \text{nes} \quad 4^3 = 64.$$

Veiksmą, kai ieškome laipsnio rodiklio žinodami laipsnio pagrindą ir laipsnį, vadiname *logaritmavimu*. Tai užrašome vartodami ženklą „log". Mūsų atveju rašysime:

$$x = \log_4 64.$$

Užrašas $\log_4 64$ reiškia skaičių, kuriuo pakėlę 4, gausime 64 — jis lygus 3, t. y.

$$\log_4 64 = 3, \quad \text{nes} \quad 4^3 = 64.$$

Užrašą $\log_4 64$ skaitysime taip: logaritmas šešiasdešimt keturių pagrindu keturi (arba šešiasdešimt keturių logaritmas pagrindu keturi).

Skaičiaus a logaritmù pagrindu b vadiname skaičių c, kuriuo pakėlę b, gauname a, t. y. $\log_b a = c$, $b^c = a$.

$$b^c = a \qquad b = \sqrt[c]{a}, \quad c = \log_b a$$

Užrašas $\log_b a$ prasmę turi ne visada. Pavyzdžiui:
1) $\log_2(-4)$ neturi prasmės, nes nėra tokio x, kad būtų teisinga lygybė $2^x = -4$ (2^x su visais x yra teigiamas);
2) $\log_{-2} 8$ neturi prasmės, nes nėra tokio x, kad būtų teisinga lygybė $(-2)^x = 8$.

? Ar prasmę turi užrašas $\log_1 8$?

Reiškinys $\log_b a$ *laikomas turinčiu prasmę, kai* $a > 0$, $b > 0$ *ir* $b \neq 1$.

? Papildykite skyrelio pradžioje esančią lentelę logaritmu.

Pratimai ir uždaviniai

Sudėtis ir atimtis

49. Sudėję du natūraliuosius skaičius, visada gauname natūralųjį skaičių, t. y. jei

$m \in \boldsymbol{N}, \quad n \in \boldsymbol{N}, \quad$ tai ir $\quad m + n \in \boldsymbol{N}.$

Pavyzdžiui: $2 \in \boldsymbol{N}$, $3 \in \boldsymbol{N}$, $2 + 3 \in \boldsymbol{N}$.
Pabaikite sakinius, kad jie visada būtų teisingi.
a) Jei $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, tai $m + n \in \ldots$
b) Jei $m \in \boldsymbol{Q}$, $n \in \boldsymbol{Q}$, tai $m + n \in \ldots$
c) Jei $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, tai $m - n \in \ldots$

50. Skaičių sudėčiai galioja tokios savybės:

$a + b = b + a; \qquad (a + b) + c = a + (b + c).$

a) Pateikite šias savybes iliustruojančių skaitinių pavyzdžių.
b) Pasakykite šias sumos savybes žodžiais.

51. Pabaikite teiginius ir užrašykite juos matematinėmis lygybėmis.
a) Sudėję vienas kitam ... gauname 0.
b) Prie skaičiaus pridėję ... gauname tą patį skaičių.

52. Sudėkite baigtines dešimtaines trupmenas.

a) $1{,}2 + 3{,}8$; b) $2{,}13 + 0{,}89$; c) $13{,}01 + 17{,}205$;
d) $15{,}9 + (-4{,}13)$; e) $(-5{,}22) + 3{,}25$; f) $(-21{,}95) + (-22{,}15)$.



Dešimtainius vienodų ženklų skaičius, turinčius daug skaitmenų, geriausia sudėti stulpeliu. Nepamirškite, kad kablelis turi atsidurti po kableliu, pavyzdžiui:

$$\begin{array}{r} 2{,}705 \\ +\ 13{,}49 \\ \hline 16{,}195 \end{array}$$

53. Atimkite baigtines dešimtaines trupmenas.

a) $17{,}1 - 15{,}1$; b) $13{,}23 - 19{,}54$; c) $0{,}25 - 1{,}029$;
d) $103{,}24 - (-22{,}7)$; e) $(-10{,}04) - 15{,}26$; f) $(-12{,}2) - (-18{,}22)$.



Ar teisingai atėmėte, pasitikrinkite sudėdami.

54. Sudėkite paprastąsias trupmenas.

a) $\frac{7}{8}+\frac{5}{8}$; b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; c) $\frac{17}{30}+\frac{17}{84}$;

d) $\frac{13}{49}+\left(-\frac{16}{21}\right)$; e) $-\frac{1}{12}+\frac{1}{8}$; f) $\left(-\frac{23}{24}\right)+\left(-\frac{17}{18}\right)$.



Prisiminkite, kaip sudedamos (atimamos) paprastosios trupmenos su vienodais vardikliais:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

su skirtingais vardikliais:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd},\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}.$$

55. Atimkite paprastąsias trupmenas.

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; b) $\frac{15}{4}-\frac{51}{6}$; c) $\frac{10}{3}-\frac{3}{10}$;

d) $\frac{7}{2}-\left(-\frac{9}{4}\right)$; e) $\left(-\frac{3}{14}\right)-\frac{1}{10}$; f) $\left(-\frac{15}{16}\right)-\left(-\frac{1}{16}\right)$.

56. Atlikite veiksmus su mišriaisiais skaičiais.

a) $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}$; b) $3\frac{2}{5}-1\frac{3}{4}$; c) $15\frac{2}{7}-17\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}$; d) $-11\frac{11}{12}-10\frac{10}{11}+9\frac{9}{10}$;

e) $-2\frac{1}{5}+\left(-4\frac{1}{3}\right)-\left(-3\frac{2}{4}\right)$.



Trupmena $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \boldsymbol{N})$ vadinama:

- taisyklingąja, kai $a < b$, pvz., $\frac{2}{3}$;
- netaisyklingąja, kai $a \geqslant b$, pvz., $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{3}$.

Netaisyklingąją trupmeną galima parašyti mišriuoju skaičiumi (išskiriant sveikąją dalį), pvz., $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Mišrųjį skaičių galima parašyti sveikosios ir trupmeninės dalies suma, pvz.,

$1\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}$.

Atliekant veiksmus su mišriaisiais skaičiais, kartais pravartu juos paversti netaisyklingosiomis trupmenomis, pvz., $2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot3+1}{3}=\frac{7}{3}$.

57. Atlikite veiksmus su dešimtainėmis begalinėmis periodinėmis trupmenomis.

a) $0,(2)+0,(3)$; b) $0,(2)-0,(3)$; c) $2,(25)+3,(125)$;

d) $-4,(12)-2,(5)$; e) $21,(21)-(-21,(25))$; f) $-12,(4)+(-3,(4))$.



Atliekant veiksmus su periodinėmis trupmenomis, kartais pravartu jas paversti paprastosiomis trupmenomis.

58. Atlikite veiksmus.

a) $\frac{1}{2}-0,5$; b) $\frac{1}{3}+0,5$; c) $-2\frac{2}{3}-1,1$; d) $\frac{4}{7}-0,2+1,(3)$; e) $2,(15)-2\frac{1}{5}+\frac{3}{7}$.

59. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:

a) $x + 10 = 7$? b) $x - 3 = -15$?

c) $-10 + x = 17$? d) $x + \frac{1}{2} = 1\frac{3}{5}$?

e) $2 - x = -\frac{1}{2}$? f) $-0{,}3 + x = 0{,}(3)$?

g) $100 = x - 99{,}(9)$? h) $100 = 99{,}(9) - x$?

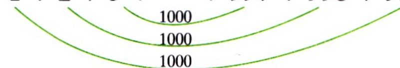
60. Apskaičiuokite.

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$;
b) $2 + 4 + 6 + \cdots + 1000$;
c) $1 + 3 + 5 + \cdots + 999$;
d) $1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) + \cdots + (-1000)$;
e) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 49 + 50 + (-49) + (-48) + \cdots + (-1)$;
f) $97 - 95 + 93 - 91 + \cdots + 11 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1$;
g) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \cdots + 97 + 98 - 99 - 100$;
h) $1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 - 12 + \cdots + 151 + 152 + 153$.



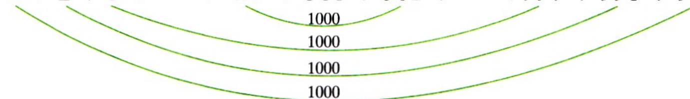
a) Apskaičiuokime $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$.
Iš viso šioje sumoje yra 1000 dėmenų. Pastebėkime, kad, prie pirmo dėmens (jis lygus 1) pridėję priešpaskutinį dėmenį (999), gausime 1000. Tą patį gausime, prie antro dėmens (2) pridėję trečią nuo galo dėmenį (998) ir t. t.:

$1 + 2 + 3 + \cdots + 997 + 998 + 999 + 1000.$



Belieka išsiaiškinti, kiek tokių sumų bus iš viso. Tuo tikslu parašykime viduriniuosius sumos narius:

$1 + 2 + 3 + \cdots + 499 + 500 + 501 + \cdots + 997 + 998 + 999 + 1000.$



Dabar jau aišku, kad iš viso yra 499 sumos, kurių kiekviena lygi 1000:

$\underbrace{1000 + 1000 + \cdots + 1000}_{499 \text{ dėmenys}} = 1000 \cdot 499 = 499\,000.$

Prie šios sumos pridedame be poros likusius skaičius 500 ir 1000.
Taigi:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 499 + 500 + 501 + \cdots + 997 + 998 + 999 + 1000 =$$
$$= 1000 \cdot 499 + 500 + 1000 = 500\,500.$$

Žinoma, nesunku buvo pastebėti, kad

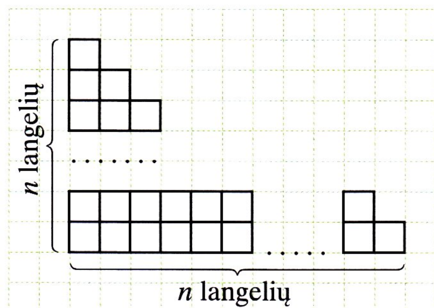
$1 + 2 + \cdots + 500 + 501 + \cdots + 999 + 1000 = 1001 \cdot 500.$

61. Maždaug prieš 2500 metų senovės graikų matematikai pirmųjų n natūraliųjų skaičių sumą

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$

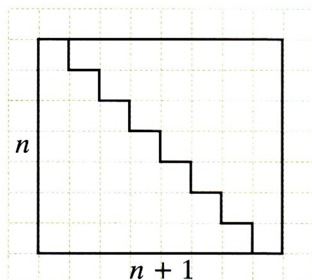
apskaičiuodavo taip.

Pirmiausia jie braižydavo languotus laiptelius:



Laiptelius „konstruodavo“ iš apačios į viršų, t. y. nubrėždavo juostą iš n langelių, virš jos — juostą iš $(n - 1)$ langelio, ..., priešpaskutinėje juostoje — 2 langeliai, viršutinėje — 1 langelis.

Po to gautų „laiptelių“ dešinėje braižydavo analogiškus laiptelius, tik apverstus. Tas abi konstrukcijas suglaudę gaudavo stačiakampį:



Šis stačiakampis sudarytas iš $n \cdot (n + 1)$ langelių.

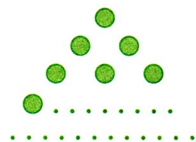
Vadinasi, kiekvienuose iš lygių laiptelių yra po $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ langelių. O tai ir yra ieškomoji suma. Gavome formulę natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sumai rasti:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Remdamiesi formule, apskaičiuokite:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + 954$; b) $1 + 2 + 3 + \cdots + 102\,467$.

62. 100 monetų sudėta taip:



1) Kiek monetų yra apatinėje eilutėje? Ar ji pilna?
2) Į kiek eilučių sudėtos monetos?

Daugyba ir dalyba

63. Sudauginę du natūraliuosius skaičius, visada gauname natūralųjį skaičių, t. y. jei

$m \in N, \quad n \in N, \quad$ tai ir $\quad m \cdot n \in N.$

Pavyzdžiui: $2 \in N$, $3 \in N$, $2 \cdot 3 \in N$.
Pabaikite sakinius, kad jie visada būtų teisingi.
a) Jei $m \in Z$, $n \in Z$, tai $m \cdot n \in \ldots$
b) Jei $m \in Q$, $n \in Q$, tai $m \cdot n \in \ldots$
c) Jei $m \in N$, $n \in N$, tai $m : n \in \ldots$

64. Mokinys užrašė tokį sakinį:

Jei $m \in Z$, $n \in Z$, *tai* $m : n \in Q$.

Mokytojas už tai parašė 9. Kaip manote, kodėl mokytojas neparašė 10?

65. Skaičių daugybai galioja tokios savybės:

$a \cdot b = b \cdot a;$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

$(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n;$

$(a - b) \cdot n = a \cdot n - b \cdot n;$

$a \cdot 0 = 0.$

a) Pateikite šias savybes iliustruojančių skaitinių pavyzdžių.
b) Pasakykite šias daugybos savybes žodžiais.
c) Pabaikite teiginius ir užrašykite juos matematinėmis lygybėmis:
   1) Sudauginę vienas kitam ... gauname 1.
   2) Skaičių padauginę ... gauname tą patį skaičių.

66. 1) Mintinai apskaičiuokite sandaugą:
   a) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 250 \cdot 500;$
   b) $\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{10 \text{ dauginamųjų}}.$
2) Kaip trumpiau užrašoma n vienodų dauginamųjų, kurių kiekvienas lygus a, sandauga?

67. Keliais nuliais baigiasi sandauga:
a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$?
b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25$?



Iš eilės einančių natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sandauga trumpiau užrašoma vartojant ženklą ! (faktoriálas), pavyzdžiui,

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25 = 25!$

Vadinasi, klausiama, keliais nuliais baigiasi 25!

68. Pabaikite sakinį.

a) Daugindami du teigiamus skaičius, gauname ...

b) Daugindami du neigiamus skaičius, gauname ...

c) Daugindami du skirtingų ženklų skaičius, gauname ...

d) Skaičių a padalyti iš skaičiaus b — tai tas pats, kas a padauginti ...

e) Daugindami ... gauname nulį.

Sugalvokite analogiškų teiginių dalybai.

69. Sudauginkite (padalykite) baigtines dešimtaines trupmenas.

a) $2{,}1 \cdot 0{,}3$; b) $(-21{,}25) \cdot 2{,}03$; c) $1{,}1 \cdot (-2{,}22)$;
d) $(-10{,}5) \cdot (-2{,}15)$; e) $41{,}385 : 3{,}1$; f) $(-10523{,}646) : 202{,}3$;
g) $(-26148{,}2181) : (-112{,}112)$.



Dalinį ir daliklį padauginus ar padalijus iš to paties, nelygaus 0 skaičiaus, dalmuo nepasikeičia. Dešimtainių trupmenų dalybą pravartu keisti sveikųjų skaičių dalyba. Pavyzdžiui:

$4{,}2 : 1{,}05 = (4{,}2 \cdot 100) : (1{,}05 \cdot 100) = 420 : 105 = 4.$

70. Sudauginkite (padalykite) paprastąsias trupmenas.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$; c) $\left(-\frac{81}{10}\right) \cdot \frac{15}{18}$; d) $\left(-\frac{64}{100}\right) \cdot \left(-\frac{25}{32}\right)$;
e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; g) $\left(-\frac{81}{10}\right) : \frac{18}{15}$; h) $\left(-\frac{64}{100}\right) : \left(-\frac{32}{25}\right)$.



Prisiminkite, kaip dauginamos ir dalijamos paprastosios trupmenos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

71. Atlikite veiksmus su mišriaisiais skaičiais.

a) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$; b) $3\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4}$; c) $-1\frac{1}{5} \cdot \left(-2\frac{1}{7}\right)$;
d) $4\frac{2}{3} : \left(-2\frac{3}{5}\right)$; e) $-1\frac{2}{7} : 2\frac{3}{14}$; f) $5\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)$.



Mišrųjį skaičių paverskite netaisyklingąja trupmena.

72. Atlikite veiksmus su dešimtainėmis begalinėmis periodinėmis trupmenomis.

a) $0,(2) \cdot 0,(3)$; b) $0,(2) : 0,(3)$; c) $2,(25) \cdot 3,(125)$;
d) $-4{,}12 \cdot (-2,(5))$; e) $21,(21) : (-21,(25))$; f) $-12,(4) \cdot 3,(4)$.

73. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:

a) $5x = 25$? b) $-5x = -12$? c) $-15x = 23{,}2$?
d) $\frac{x}{5} = 11$? e) $x : (-5) = -1{,}1$? f) $(-5) : x = -1{,}1$?
g) $-\frac{7}{x} = \frac{3}{4}$? h) $\frac{2}{x} = -2\frac{1}{2}$? i) $-\frac{0,(3)}{x} = 1\frac{1}{2}$?

Kėlimas natūraliuoju laipsniu ir n-tojo laipsnio šaknies traukimas

74.

	Taisyklė	Pavyzdys
1)	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^7 \cdot 2^4 = 2^{11}$
2)	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$
3)	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^7)^4 = 2^{7 \cdot 4} = 2^{28}$
4)	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
5)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

a) Apskaičiuokite.

$2{,}1^2, \quad (-2{,}1)^2, \quad -2{,}1^2;$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3, \quad -\frac{2}{3}^3;$

$\left(1\frac{1}{2}\right)^4, \quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^4, \quad -\left(1\frac{1}{2}\right)^4.$

b) Apskaičiuokite.

$2^4 \cdot 2^3, \quad 2^4 : 2^3, \quad (2^4)^3;$

$(-2)^4 \cdot (-2)^3, \quad (-2)^4 : (-2)^3, \quad ((-2)^4)^3;$

$(-2)^4 \cdot 2^3, \quad -2^4 : 2^3, \quad (-2^4)^3.$

c) Įrodykite 1, 2 ir 3 taisykles, kai $n, m \in \boldsymbol{N}$.



c) Įrodykime, kad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $(n, m \in \boldsymbol{N})$.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kartų}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ kartų}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ kartų}} = a^{n+m}.$$

75. Kai $m \in \boldsymbol{N}$ ir $n \in \boldsymbol{N}$, tai $m^n \in \boldsymbol{N}$. Pavyzdžiui, $2 \in \boldsymbol{N}$, $3 \in \boldsymbol{N}$, $2^3 \in \boldsymbol{N}$. Pabaikite sakinį.

a) Jei $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$ $(n \geqslant 2)$, tai $m^n \in$ ...

b) Jei $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$ $(n \geqslant 2)$, tai $\sqrt[n]{m} \in$ ...

76. Ištraukite šaknį.

a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{225}$, $\sqrt{10\,000}$;

b) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{1000}$;

c) $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[4]{10\,000}$.



Ar teisingai ištraukėme šaknį, tikriname keldami laipsniu. Pavyzdžiui:

$\sqrt{9} = 3$, nes $3^2 = 9$; $\quad \sqrt[3]{8} = 2$, nes $2^3 = 8$.

77. 1) Kam lygu:

a) $(\sqrt{4})^2$, $(\sqrt{9})^2$, $(\sqrt{10})^2$? b) $\sqrt{4^2}$, $\sqrt{9^2}$, $\sqrt{10^2}$?

c) $\sqrt{(-4)^2}$, $\sqrt{(-9)^2}$, $\sqrt{(-10)^2}$?

2) Pabaikite rašyti lygybę.

d) $(\sqrt{a})^2 = ...$, kai $a \geqslant 0$; e) $\sqrt{a^2} = ...$, kai $a \geqslant 0$;

f) $\sqrt{a^2} = ...$, kai $a < 0$; g) $\sqrt{a^2} = ...$, kai $a \in \boldsymbol{R}$.



Atlikdami mums žinomus veiksmus su skaičiais (sudėdami, atimdami, daugindami, dalydami, keldami laipsniu, traukdami šaknį), rezultatą gauname vieną skaičių, pavyzdžiui:

$$2+3=5, \quad 2-3=-1, \quad 2\cdot 3=6, \quad 2:3=\frac{2}{3}, \quad 3^2=9, \quad \sqrt{9}=3.$$

Panagrinėkime kėlimą kvadratu ir kvadratinės šaknies traukimą.
Pakelkime kvadratu vienas kitam priešingus skaičius, pavyzdžiui, 3 ir -3:

$$3^2=9, \quad (-3)^2=9.$$

Abiem atvejais gavome tą patį skaičių, t. y. 9.
Traukdami šaknį iš 9, gausime

$$\sqrt{9}=3, \quad \text{nes } 3^2=9.$$

Bet jūs galite pasakyti, kad $\sqrt{9}=-3$, $(-3)^2=9$. Bet tada išeitų, kad, atlikdami kvadratinės šaknies traukimo veiksmą, gavome du skirtingus skaičius. Tai įneštų daug painiavos. Prisiminkime kvadratinės šaknies apibrėžimą:
Kvadratine šaknimi iš neneigiamojo skaičiaus a vadinamas toks ***neneigiamasis*** *skaičius, kurį pakėlę kvadratu, gauname a.*
Todėl

$$\sqrt{9}=3, \quad \text{nes } 3^2=9 \text{ ir } 3>0, \text{ o}$$

$$\sqrt{9}\neq -3, \quad \text{nors } (-3)^2=9, \text{ bet } -3<0.$$

Panašiai susitarta ir dėl visų lyginio laipsnio šaknų.
Taigi spręsdami, pavyzdžiui, lygtį $x^2=9$ gausime du sprendinius 3 ir -3 (jie kartais taip pat pavadinami šaknimis), bet traukdami šaknį $\sqrt{9}$ gauname vienintelę reikšmę 3.

78. a) Pabaikite sakinį: *Nelyginio laipsnio šaknis iš teigiamojo skaičiaus yra ..., o iš neigiamojo skaičiaus ...*

b) Pasakykite nelyginio laipsnio šaknies apibrėžimą.



Panagrinėkime kėlimą trečiuoju laipsniu ir trečiojo laipsnio šaknies traukimą.
Pakelkime kubu vienas kitam priešingus skaičius, pavyzdžiui, 2 ir -2:

$$2^3=8, \quad (-2)^3=-8.$$

Iš gautų rezultatų ištraukime kubinę šaknį:

$$\sqrt[3]{8}=2, \quad \text{nes } 2^3=8; \quad \sqrt[3]{-8}=-2, \quad \text{nes } (-2)^3=-8.$$

Taigi trečiojo laipsnio šaknį galima traukti ir iš neigiamųjų skaičių. Tai teisinga visoms nelyginio laipsnio šaknims.

79.

	Savybė	Pavyzdys
1)	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
2)	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$
3)	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64}$
4)	$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$	$\sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2$
5)	$\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$	$\sqrt[6]{4^3} = \sqrt{4}$

a) Įsitikinkite lentelės pavyzdžiuose pateiktų lygybių teisingumu, apskaičiavę kairės ir dešinės pusių reikšmes.
b) Sugalvokite daugiau šaknų savybes iliustruojančių pavyzdžių.
c) Panagrinėkime 1) šaknų savybę.
Vietoj a ir b imkime neigiamuosius skaičius, pavyzdžiui, -4 ir -9, o vietoj n imkime 2, t. y. panagrinėkime šaknį

$\sqrt{(-4) \cdot (-9)}$.

Apskaičiuokime šios šaknies reikšmę, nesiremdami 1) savybe:

$\sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{36} = 6$.

O dabar pabandykime pritaikyti 1) savybę:

$\sqrt{(-4) \cdot (-9)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$.

Bet $\sqrt{-4}$ ir $\sqrt{-9}$ neturi prasmės.
Kaip pataisyti šią situaciją? Pabaikite lygybes:

$\sqrt{a \cdot b} = \ldots,\quad$ kai $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$;

$\sqrt{a \cdot b} = \ldots,\quad$ kai $a < 0,\ b < 0$.

O gal galite sugalvoti bendrą formulę abiem atvejams, t. y.

$\sqrt{ab} = \ldots,\quad$ kai $a, b \in \boldsymbol{R}$ ir yra vienodų ženklų?

80. Remdamiesi šaknų savybėmis, apskaičiuokite:

a) $\sqrt{25 \cdot 121}$; b) $\sqrt{\frac{225}{10\,000}}$; c) $\sqrt[3]{\sqrt{4096}}$; d) $\sqrt[4]{16^5}$; e) $\sqrt[10]{100^5}$.

81. Raskite visus skaičius, kuriuos parašę vietoj x gautume teisingą lygybę.

a) $x^2 = 25$; b) $x^2 = 0$; c) $x^2 = -1$;
d) $x^3 = 8$; e) $x^3 = 0$; f) $x^3 = -1$;
g) $2^x = 8$; h) $2^x = 1$; i) $2^x = -2$;
j) $\sqrt{x} = 4$; k) $\sqrt{x} = 0$; l) $\sqrt{x} = -1$;
m) $\sqrt[3]{x} = 1$; n) $\sqrt[3]{x} = -2$; o) $\sqrt[3]{x} = 0$.

Laipsnis su realiuoju rodikliu

82. Apskaičiuokite laipsnio su natūraliuoju rodikliu reikšmę.
a) 2^2; b) 2^5; c) $(-2)^5$; d) -2^5.

83. Apskaičiuokite laipsnio su nuliniu rodikliu reikšmę.
a) 2^0; b) $(-2)^0$; c) -2^0.



Laipsnis su nuliniu rodikliu apibrėžiamas taip: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Šią lygybę galima gauti taip:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0, \\ \dfrac{a^m}{a^m} = 1; \end{array}\right\} \Rightarrow a^0 = 1.$$

84. Apskaičiuokite laipsnio su neigiamuoju sveikuoju rodikliu reikšmę.
a) 2^{-2}; b) 2^{-5}; c) $(-2)^{-5}$; d) -2^{-5}.



Laipsnis su neigiamuoju sveikuoju rodikliu apibrėžiamas taip: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$. Patikėti šia lygybe turėtų padėti toks pavyzdys su laipsniais (žr. dešinėje).

Galima samprotauti ir taip:
$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

$2^3 = 8$
:2
$2^2 = 4$
:2
$2^1 = 2$
:2
$2^0 = 1$
:2
$2^{-1} = \frac{1}{2}$
:2
$2^{-2} = \frac{1}{4}$
:2
$2^{-3} = \frac{1}{8}$

85. Apskaičiuokite laipsnio su racionaliuoju rodikliu reikšmę (dešimtųjų tikslumu).
a) $2^{\frac{1}{2}}$; b) $2^{\frac{1}{3}}$; c) $2^{\frac{2}{3}}$; d) $5^{1\frac{1}{2}}$.



Laipsnis su racionaliuoju rodikliu apibrėžiamas taip: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a > 0)$. Patikėti šia lygybe galima panagrinėjus šiuos pavyzdžius:

$(\sqrt{5})^2 = 5, \quad (5^{\frac{1}{2}})^2 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = 5 \Rightarrow \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}};$

$(\sqrt[4]{3})^4 = 3, \quad (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3^{\frac{1}{4}\cdot 4} = 3^1 = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}};$

$$\left.\begin{array}{l} (\sqrt[3]{25})^3 = (\sqrt[3]{5^2})^3 = 5^2, \\ (25^{\frac{1}{3}})^3 = ((5^2)^{\frac{1}{3}})^3 = (5^{2\cdot\frac{1}{3}})^3 = (5^{\frac{2}{3}})^3 = 5^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 5^2; \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}.$$

86. Tarp kokių artimiausių sveikųjų skaičių yra laipsnis su iracionaliuoju rodikliu:

a) $2^{\sqrt{2}}$? b) $2^{\sqrt{3}}$? c) $2^{-\sqrt{2}}$? d) $2^{-\sqrt{3}}$?

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$? f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$? g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$? h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}}$?

Logaritmas

87. Raskite skaičiaus logaritmą nurodytu pagrindu.

a) $\log_2 8$; b) $\log_2 16$; c) $\log_2 128$; d) $\log_2 1$;
e) $\log_2 2$; f) $\log_2 \sqrt{2}$; g) $\log_3 27$; h) $\log_3 \frac{1}{3}$;
i) $\log_3 \frac{1}{9}$; j) $\log_3 1$; k) $\log_3 \sqrt{3}$; l) $\log_3 \sqrt[3]{9}$.



$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, pavyzdžiui, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$;
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, pavyzdžiui, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$.

88. Kas turėtų būti parašyta vietoj x, kad būtų teisingos lygybės:

a) $\log_2 x = 1$; $\log_2 x = 0$; $\log_2 x = 3$; $\log_2 x = -1$; $\log_2 x = -3$; $\log_2 x = \frac{2}{3}$?

b) $\log_5 x = 2$; $\log_5 x = 0$; $\log_5 x = -1$; $\log_5 x = -2$; $\log_5 x = \frac{1}{2}$?

c) $\log_x 5 = 1$; $\log_x 25 = 2$; $\log_x 1000 = 3$; $\log_x \frac{1}{2} = -1$; $\log_x \frac{1}{27} = -3$?

89. Kai logaritmo pagrindas yra 10, tai logaritmą vadiname *dešimtainiu* ir rašome trumpiau, pavyzdžiui:

$\log_{10} 1000 = \lg 1000$; $\log_{10} 100 = \lg 100$; $\log_{10} 10 = \lg 10$.
$\log_{10} 1 = \lg 1$; $\log_{10} 0{,}1 = \lg 0{,}1$; $\log_{10} \frac{1}{100} = \lg \frac{1}{100}$.

Užrašą lg 1000 skaitome: dešimtaĩnis logarìtmas tūkstančio (arba tūkstančio dešimtainis logaritmas).

1) Perskaitykite aukščiau surašytus dešimtainiùs logaritmùs ir apskaičiuokite jų reikšmes.

2) Skaičiuokliu apskaičiuokite ir suapvalinkite iki dešimtųjų šiuos dešimtainius logaritmus:

a) $\lg 1$; $\lg 2$; $\lg 3$; $\lg 4$; $\lg 5$; $\lg 6$; $\lg 7$; $\lg 8$;

b) $\lg \frac{1}{10}$; $\lg \frac{2}{10}$; $\lg \frac{3}{10}$; $\lg \frac{4}{10}$; $\lg \frac{5}{10}$; $\lg \frac{6}{10}$; $\lg \frac{7}{10}$; $\lg \frac{8}{10}$; $\lg \frac{9}{10}$;

c) $\lg 9$; $\lg 11$; $\lg 12$; $\lg 13$; $\lg 14$; $\lg 15$; $\lg 16$; $\lg 17$; $\lg 18$.

90. Su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę logaritmas nurodytu pagrindu:

a) $\log_3 x$? b) $\log_5(x+2)$? c) $\log_7(-x)$? d) $\log_8(x^2)$?
e) $\log_5(x+1)^2$? f) $\lg \sqrt{x}$? g) $\lg |x|$?



Logaritmas turi prasmę, kai pologaritminis reiškinys yra didesnis už nulį.

91. Su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę nurodyto skaičiaus logaritmas:
a) $\log_x 2$? b) $\log_{x+1} 5$? c) $\log_{|x|} 3$? d) $\log_{\sqrt{x}} 4$? e) $\log_{-x} 7$?



Logaritmo pagrindas turi būti didesnis už nulį ir nelygus vienetui.

1.4. Skaičių intervalai

Lygties sprendinių aibė

Spręsdami lygtis, ieškome nežinomojo reikšmių, su kuriomis būtų teisinga duotoji lygybė. Lygties sprendinių dažniausiai būna vienas ar keli, bet pasitaiko, kad lygtis neturi sprendinių arba turi jų be galo daug.

Pavyzdžiui:

a) $\frac{3}{x} = 10$,
$x = \frac{3}{10}$;

b) $x^2 + 2x = 0$,
$x(x + 2) = 0$,
$x_1 = 0, x_2 = -2$;

c) $x^4 + 10 = 0$,
lygtis sprendinių neturi;

d) $|x - 1| = |1 - x|$,
visi skaičiai yra lygties sprendiniai.

1) Pateiktų lygčių sprendinius užrašykite aibėmis.
2) Užrašykite lygties $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ sprendinius.

Nelygybės sprendinių aibė

Nelygybės dažniausiai turi be galo daug sprendinių. Pavyzdžiui, nelygybės

$x < 3$

sprendiniai yra visi skaičiai, mažesni už 3. Visus nelygybės sprendinius patogu užrašyti intervalu:

$x \in (-\infty; 3)$.

Intervalais užrašykite sprendinius nelygybių:
a) $x \leqslant 3$; b) $x > 3$; c) $x \geqslant 3$; d) $-3 < x \leqslant 3$.

Intervalas gali būti atviras, uždaras, pusiau atviras, pusiau uždaras.

Intervalas	*Skaitome*	*Vaizduojame*
$(a; b)$	Intervalas nuo a iki b	a b
$[a; b)$	Intervalas nuo a iki b, įskaitant a	a b
$(a; b]$	Intervalas nuo a iki b, įskaitant b	a b
$[a; b]$	Intervalas nuo a iki b, įskaitant a ir b	a b
$(-\infty; a]$	Intervalas nuo $-\infty$ iki a, įskaitant a	a
$(a; +\infty)$	Intervalas nuo a iki $+\infty$	a

Nelygybių sistemos sprendinių aibė

Sprendžiant uždavinius, kartais tenka ieškoti intervalų sąjungos ar sankirtos. Pavyzdžiui, išspręskime nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 2x + 5 < 45, \\ 3 - x \leqslant -7. \end{cases}$$

Spręsdami sistemą, ieškome į tą sistemą įeinančių nelygybių *bendrų* sprendinių.

1) Raskime pirmosios nelygybės sprendinius:

$2x + 5 < 45,$

$2x < 45 - 5,$

$2x < 40,$

$x < 40 : 2,$

$x < 20.$

20 x

Taigi pirmosios nelygybės sprendiniai yra intervalas $(-\infty; 20)$.

2) Raskime antrosios nelygybės sprendinius:

$3 - x \leqslant -7,$

$-x \leqslant -7 - 3,$

$-x \leqslant -10,$

$x \geqslant -10 \cdot (-1),$

$x \geqslant 10.$

10 x

Taigi antrosios nelygybės sprendiniai yra intervalas $[10; +\infty)$.

3) Raskime bendrus abiejų nelygybių sprendinius:

10 20 x

Bendri sprendiniai yra intervalas $[10; 20)$.
Galima sakyti, kad radome intervalų $(-\infty; 20)$ ir $[10; +\infty)$ sankirtą:

$(-\infty; 20) \cap [10; +\infty) = [10; 20).$

Kartais prireikia ne tik intervalų sankirtos, bet ir jų sąjungos.
Pavyzdžiui,

$(-5; 3) \cup (2; 10] = (-5; 10];$

–5 2 3 10

$(-\infty; 0] \cup (0; 5) = (-\infty; 5).$

0 5

Pratimai ir uždaviniai

Lygties sprendinių aibė

92. Lentelėje surašytos lygtys ir jų sprendinių aibės. Nustatykite, kuri lygtis kurią aibę atitinka.

Lygtis	Sprendiniai
a) $x^2 = -1$	**A** $\{-2\}$
b) $x^2 = 4$	**B** $\varnothing$
c) $(x+2)\pi = 0$	**C** $\{0,(3)\}$
d) $3x - 1 = 0$	**D** $\{-3; 2\}$
e) $x - \sqrt{5} = 0$	**E** $(-\infty; +\infty)$
f) $x^2 - 2x - 4 = 0$	**F** $\{\sqrt{5}\}$
g) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x-2}$	**G** $\{1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\}$
h) $x - 2 = x - 2$	**H** $[2; +\infty)$
i) $(x+3)(x-2) = 0$	**I** $\{-2; 2\}$

93. Išspręskite lygtį ir jos sprendinius užrašykite aibe.

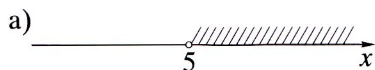
a) $2x + 5 = 5x - 7$; b) $5 - 2x = 4 - 3x$;
c) $x^2 = 25$; d) $x^2 = 121$;
e) $x^2 - 0,25 = 0$; f) $x^2 - 0,26 = 0$;
g) $x^2 = 0$; h) $x^2 = -25$;
i) $(x-1)(x+2) = 0$; j) $(1-x)(2-x) = 0$;
k) $x(x-2)(x-3)(x-4) = 0$; l) $2(2x-1)(3-2x)(x-5)(x+7) = 0$;
m) $\log_8 x = 2$; n) $\lg x = 1$;
o) $\sqrt{x} = 4$; p) $\sqrt{x} = -4$;
q) $\sqrt[3]{x} = 1$; r) $\sqrt[3]{x} = -1$;
s) $|x| = 3$; t) $|x| = -1$;
u) $|x+5| = 3$; v) $|x^2 - 6| = 3$;
w) $|x^2 - 6| = 0$; z) $|x^2 - 6| = -3$.

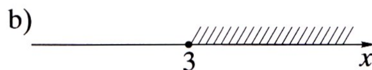
94. Sugalvokite lygtį, kurios sprendiniai būtų:

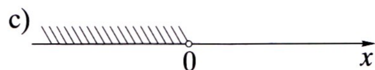
a) $\{3\}$; b) $\{-\sqrt{5}\}$; c) $\{0; 4\}$; d) $\{-5; 1\}$;
e) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; f) $(-\infty; +\infty)$; g) $\varnothing$; h) $(-\infty; 5]$.

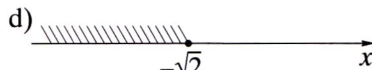
Nelygybės sprendinių aibė

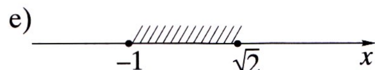
95. Užbrūkšniuotą skaičių tiesės dalį užrašykite intervalu ir nelygybe.

a) 

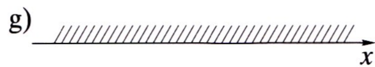
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

96. Nelygybės sprendinius pavaizduokite skaičių tiesėje ir užrašykite intervalu.

a) $2x < 10$; b) $-x \geqslant 5$; c) $2x + 4 \leqslant 5x - 1$;
d) $2 < x \leqslant 7$; e) $-3 \leqslant x < \sqrt{5}$; f) $2 < 2x < 6$;
g) $|x| < 3$; h) $|2x| < 10$; i) $|x| \geqslant 5$.



1) $-12 \leqslant 3x < 15, \mid : 3$
$-4 \leqslant x < 5$;
2) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$;
3) $|x| > a \Rightarrow x < -a$, arba $x > a$.



97. Intervalą pavaizduokite skaičių tiesės dalimi ir užrašykite nelygybe (jei įmanoma).

a) $(-\infty; 5)$; b) $[-3; +\infty)$; c) $(0; +\infty)$;
d) $(-\infty; 0]$; e) $(-\infty; +\infty)$; f) $[-7; 7]$;
g) $(-3; 5]$; h) $[5; 7)$; i) $(0; 10)$.

98. Išspręskite nelygybę.

a) $2x + 2 \geqslant 2$; b) $-2x + 2 > 2$;
c) $-2x - 2 < 2$; d) $-2 < 2x - 2$;
e) $2x - 2 > 2(x - 1)$; f) $2(x - 1) \geqslant 2x - 2$.

99. Automobilis važiuoja greičiu nuo 60 km/h iki 110 km/h. Apskaičiuokite, kokį kelią jis gali nuvažiuoti per:
a) 0,5 val.; b) 2 val.; c) 2 val. 15 min.; d) $3\frac{3}{4}$ val.
Kiekvienu atveju apskaičiuokite, kiek laiko jis gali užtrukti kelionėje.

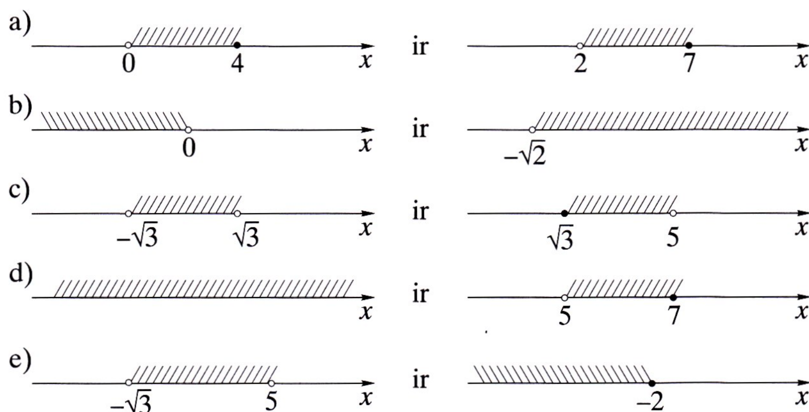
Intervalų sąjunga ir sankirta

100. Raskite intervalų sąjungą ir sankirtą.

a) $(3;\ 5)$ ir $(1;\ 7)$;
b) $(-2;\ 10)$ ir $(5;\ 7)$;
c) $(-\infty;\ 4]$ ir $(1;\ 4]$;
d) $(-\infty;\ +\infty)$ ir $(0;\ \sqrt{3})$;
e) $(-\infty;\ 0)$ ir $(-\infty;\ 2]$;
f) $(0;\ 7]$ ir $[5;\ 7)$;
g) $(-5;\ -3]$ ir $(-4;\ -2]$;
h) $[-1;\ 3\frac{1}{3})$ ir $(-1;\ 3{,}3]$;
i) $[-\sqrt{5};\ 2{,}5)$ ir $(-2{,}25;\ \sqrt{6{,}3})$;
j) $(-0{,}(3);\ \frac{1}{3})$ ir $[-\frac{1}{3};\ 0{,}(3)]$.

Kiekvienu atveju atsakymą parašykite intervalu ir pavaizduokite skaičių tiesėje.

101. Raskite pažymėtų skaičių tiesių dalių sąjungą ir sankirtą.



Kiekvienu atveju atsakymą pavaizduokite skaičių tiesėje ir užrašykite intervalu.

Nelygybių sistemos sprendinių aibė

102. Skaičių tiesėje pažymėkite sistemos abiejų nelygybių sprendinius ir užrašykite tos sistemos sprendinius.

a) $\begin{cases} x < 3, \\ x > -2; \end{cases}$
b) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x \geqslant -\sqrt{2}; \end{cases}$
c) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$
d) $\begin{cases} |x| < 3, \\ x \geqslant 2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x > 5; \end{cases}$
f) $\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{2}, \\ x \geqslant \frac{1}{2}; \end{cases}$
g) $\begin{cases} x < -3, \\ x < 0; \end{cases}$
h) $\begin{cases} |x| > 3, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$

103. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x + 1 > 5, \\ x - 1 < 4; \end{cases}$
b) $\begin{cases} -3x < 12, \\ \frac{1}{5}x \geqslant 1; \end{cases}$
c) $\begin{cases} 4x \leqslant x + 18, \\ 2 - x \leqslant -4; \end{cases}$
d) $\begin{cases} 3x \leqslant -15, \\ -\frac{3}{5}x < 0. \end{cases}$

1.5. Geometrijos uždaviniai

104. Apskaičiuokite x.

a) 30, 40, x

b) 60, 100, x

c) x, x, 40

d) 15, x, $2x$

e) x, 30°, 4

f) 60°, 8, x

g) 5, 40°, x

h) x, 70°, 10

i) x, 50°, 12

j) 8, $x°$, 4

k) 7, $x°$, 4

l) 18, $x°$, 13

m) 20, x

n) 12, 13, x

o) 2, 30°, x

p) 20, x, 15

r) 45°, x, 6, 45°

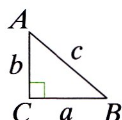
s) 30°, x, 30°, 5



Trikampis, kurio vienas kampas yra status (= 90°), vadinamas stačiuoju.

Pitagoro teorema. Stačiojo trikampio statinių ilgių kvadratų suma lygi įžambinės ilgio kvadratui

$a^2 + b^2 = c^2$.



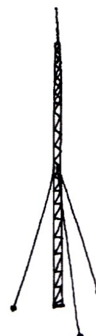
Stačiojo trikampio kraštinių ir kampų trigonometriniai ryšiai.

$\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$.

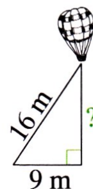
105. Anteną vertikalioje padėtyje padeda išlaikyti 3 vienodo ilgio atotampos.

a) Kokio ilgio yra kiekviena atotampa, jei jos prie žemės pritvirtintos 5 m atstumu nuo antenos pagrindo ir prie antenos 15 m aukštyje?

b) Kokį kampą sudaro atotampos su antena?



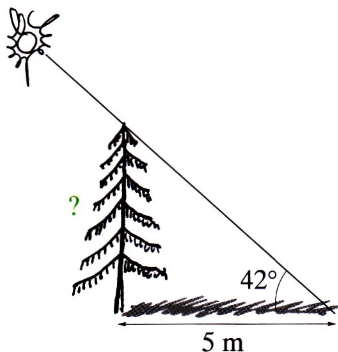
106. Į kokį aukštį pakilo balionas? Atsakymą pateikite vienos šimtosios metro tikslumu.



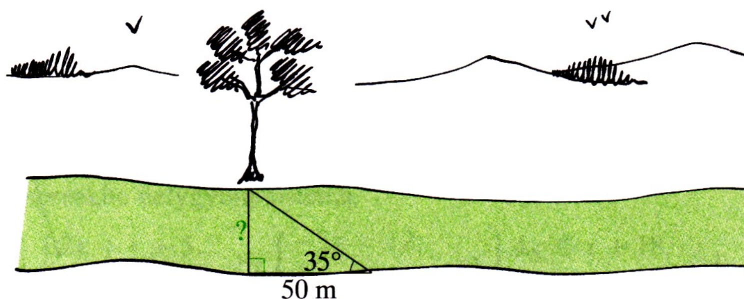
107. a) Kokiame aukštyje kopėčios atsiremia į namą?
b) Koks kopėčių pasvirimo į žemę kampas?



108. Saulės spinduliai tam tikru metu krenta į žemę 42° kampu. Koks medžio aukštis, jei jo šešėlio ilgis tuo metu 5 m?



109. Remdamiesi brėžiniu, apskaičiuokite upės plotį.



1.6. Pasitikrinkime

110. Turime aibes:

$A = \{k, l, a, s, ė\}$,
$B = \{k, l, e, v, a, s\}$,
$C = \{l, o, v, a\}$,
$D = \{a, š\}$,
$E = \{p, a, u, k, š, t, i, s\}$,
$F = \{p, l, o, v, a, s\}$.

1) Išvardykite aibės E elementus.
2) Išvardykite visų šešių aibių bendrus elementus.
3) Išvardykite elementus aibių:
a) $A \cap B$; b) $D \cap E$; c) $F \cup E$; d) $C \cup D$.

111. Iš skaičių -3; 4; $\frac{1}{5}$; $-0{,}7$; $\frac{3\pi}{5}$; 0; -4; 5; $-\sqrt{7}$; $\frac{2}{9}$; $0{,}(15)$; 7 išrinkite:
a) natūraliuosius skaičius;
b) sveikuosius skaičius;
c) racionaliuosius skaičius;
d) neneigiamuosius skaičius;
e) neteigiamuosius skaičius;
f) vienas kitam priešingų skaičių poras;
g) vienas kitam atvirkštinių skaičių poras;
h) pirminius skaičius;
i) sudėtinius skaičius;
j) iracionaliuosius skaičius;
k) realiuosius skaičius.

112. Akvilė pirmą dieną išleido 88 Lt, o tai sudarė 40% per tris dienas išleistų pinigų.
a) Kiek pinigų Akvilė išleido per tris dienas?
b) Kiek pinigų Akvilė išleido antrą dieną, jei tą dieną išleisti pinigai sudarė 50% visų išleistų pinigų?
c) Kiek pinigų išleido Akvilė trečią dieną?
d) Kiek procentų antrą dieną išleistų pinigų sudaro trečią dieną išleisti pinigai?

113. Apskaičiuokite.

a) $5 + 0{,}7$; b) $-3 - 17$; c) $7 - \frac{2}{3}$; d) $3{,}5 - 7{,}18$;
e) $8{,}1 + 0{,}3$; f) $\frac{3}{8} + \frac{1}{8}$; g) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$; h) $\frac{8}{9} - \frac{1}{9}$;
i) $\frac{2}{7} - \frac{3}{4}$; j) $-3\frac{2}{3} + 5\frac{1}{2}$; k) $6 - 8\frac{1}{4}$; l) $-4\frac{4}{5} - 2\frac{1}{5}$.

114. Apskaičiuokite.

a) $3 \cdot 1{,}5$; b) $-1{,}2 \cdot 8$; c) $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; d) $6{,}4 : 0{,}8$;
e) $\frac{5}{8} : \frac{1}{8}$; f) $-16 : \frac{4}{7}$; g) $-\frac{2}{3} : (-3)$; h) $2\frac{5}{7} \cdot 4$;
i) $-3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}$; j) $4\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$; k) $-0{,}15 : (-0{,}3)$; l) $\frac{3}{20} : (-0{,}5)$.

115. a) Pakelkite laipsniu.

2^3; $(-2)^3$; -2^3; 2^4; $(-2)^4$; -2^4; 2^1; 2^0; 2^{-1}; 2^{-2};
-2^1; -2^0; -2^{-1}; -2^{-2}; $(-2)^0$; $(-2)^1$; $(-2)^{-1}$; $(-2)^{-2}$;
$4^{\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{1}{3}}$.

b) Ištraukite šaknį.

$\sqrt{9}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{13\frac{4}{9}}$; $\sqrt{0}$;

$\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[3]{0{,}008}$; $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{0}$;

$\sqrt[4]{0{,}0001}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; $\sqrt[6]{11\frac{25}{64}}$;

c) Raskite logaritmą.

$\log_{16} 16$; $\log_{\frac{1}{16}} 16$; $\log_{16} \frac{1}{16}$; $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{16}$; $\log_{16} 1$;

$\lg 10$; $\lg 1$; $\lg \frac{1}{10}$; $\lg 100$; $\lg 0{,}001$.

116. Su kuria x reikšme teisinga lygybė:

a) $\log_3 x = 1$? b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 0$? c) $\log_2 16 = x$? d) $\lg 1 = x$?
e) $\log_x 3 = 1$? f) $\log_x \frac{1}{5} = -1$? g) $\lg x = -2$? h) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$?

117. Raskite lygties sprendinių aibę.

a) $4 + x = -8$; b) $x + 3\frac{1}{7} = 2\frac{1}{2}$; c) $-3x = 2x - 5$;
d) $-\frac{5}{x} = 2\frac{1}{2}$; e) $x^3 = 27$; f) $3^x = 1$;
g) $x^2 = 0{,}01$; h) $x^2 = -\frac{1}{4}$; i) $x^2 = 0$;
j) $x(x-1)(x+\sqrt{3}) = 0$; k) $|x - 2| = 1$; l) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

118. Raskite nelygybės sprendinių aibę.

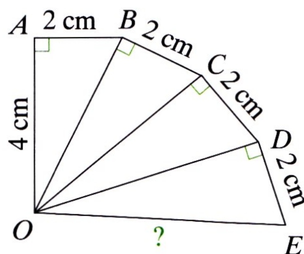
a) $3x + 5 > -1$; b) $3 - 5x < 2x + 3$; c) $\frac{3}{4} - 2x \leqslant -x - \frac{1}{4}$;
d) $x \geqslant 3\left(\frac{2}{3}x - 1\right)$; e) $2(x-1) < 4(x+1)$; f) $\frac{1}{2}(3x+5) \geqslant \frac{1}{3}(2x-5)$.

119. Raskite nelygybių sistemos sprendinių aibę.

a) $\begin{cases} 2x \leqslant 10, \\ 3x \geqslant -15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 - 2x \geqslant 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5 - 3x > 8 - x, \\ 2x - 18 > 0; \end{cases}$

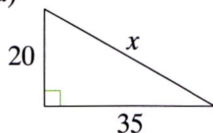
d) $\begin{cases} \frac{1}{5}x + 2 \geqslant 2, \\ \frac{3}{4}x \leqslant 6; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + 1 < x, \\ \frac{x}{4} \geqslant 1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3(x+2) < 2(x-1), \\ 4\left(\frac{x}{2} + 1\right) > 0. \end{cases}$

120. Apskaičiuokite OE.

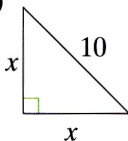


121. Apskaičiuokite x.

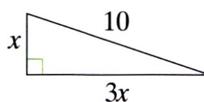
a)



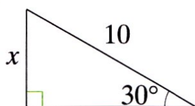
b)



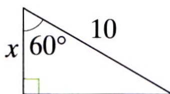
c)



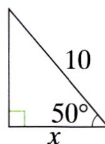
d)



e)



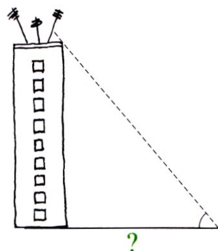
f)



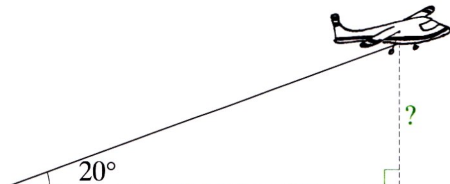
122. Namo aukštis — 26 m. Koks yra namo šešėlio ilgis tuo metu, kai saulės spinduliai krenta į žemę:

a) 36° kampu? b) 65° kampu?

Atsakymą parašykite metrų tikslumu.



123. Lėktuvo pakilimo kampas lygus 20°.



Į kokį aukštį nuo žemės pakilo lėktuvas per 6 minutes, jei jo pakilimo greitis lygus 200 km/h? Atsakymą parašykite metrų šimtų tikslumu.

Magiškieji kvadratai

Kvadratas, turintis $n \times n$ langelių, kuriuose surašyti skaičiai nuo 1 iki n^2, o kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir kiekvienos ilgiausios įstrižainės skaičių sumos S yra lygios, vadinamas magiškuoju.

$n = 3$

6	1	8
7	5	3
2	9	4

$S = 15$

$n = 4$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$S = 34$

$n = 5$

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

$S = 65$

...

Visų magiškojo kvadrato $n \times n$ skaičių suma lygi:

$$\frac{n^2 \cdot (n^2+1)}{2}.$$

Todėl kiekvienos eilutės, stulpelio ar įstrižainės skaičių suma lygi

$$S = \frac{n^2 \cdot (n^2+1)}{2} : n = \frac{n \cdot (n^2+1)}{2}.$$

Pavyzdžiui, kvadrato 6×6 atveju kiekviena suma S lygi

$$\frac{6 \cdot (6^2+1)}{2} = 111.$$

Magiškieji kvadratai slepia ir daugiau įdomių lygybių. Pavyzdžiui, kai $n = 3$:

$$6^2 + 1^2 + 8^2 = 2^2 + 9^2 + 4^2;$$

kai $n = 4$:

$$16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 = 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2,$$

$$5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 = 9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2;$$

....

Pirmajame magiškajame kvadrate ($n = 3$) slepiasi ne tik skaičius 15. Jame galima įžvelgti ir skaičių 100, pavyzdžiui:

$(61-4)+(49-6)=100,$ $(62-3)+(48-7)=100,$
$(81-2)+(29-8)=100;$ $(26-3)+(84-7)=100;$

$(67-4)+(43-6)=100,$ $(91-5)+(19-5)=100,$
$(27-8)+(83-2)=100;$ $(64-5)+(46-5)=100.$

2 REIŠKINIAI

2.1. Skaitiniai reiškiniai

Veiksmų atlikimo tvarka reiškinyje

Panagrinėkime tokį skaitinį reiškinį

$$2 - 3 : \sqrt[3]{8} + 5^2 \cdot \log_2 16.$$

Skaičiuodami šio reiškinio reikšmę, pirmiausia

traukiame šaknį $\sqrt[3]{8} = 2$;

keliame kvadratu $5^2 = 25$;

randame logaritmą $\log_2 16 = 4$.

Tada

dalijame $3 : 2 = 1{,}5$;

dauginame $25 \cdot 4 = 100$.

Ir galiausiai

atimame $2 - 1{,}5 = 0{,}5$;

sudedame $0{,}5 + 100 = 100{,}5$.

Tai galima parašyti trumpiau:

$$\begin{aligned} 2 - 3 : \sqrt[3]{8} + 5^2 \cdot \log_2 16 &= 2 - 3 : 2 + 25 \cdot 4 = \\ &= 2 - 1{,}5 + 100 = \\ &= 0{,}5 + 100 = \\ &= 100{,}5. \end{aligned}$$

Taigi veiksmus galima surikiuoti pagal jų atlikimo tvarką reiškinyje.

Veiksmų tvarka

1	Kėlimas laipsniu a^b	Šaknies traukimas $\sqrt[b]{c}$	Logaritmavimas $\log_a c$
2	Daugyba $a \cdot b$	Dalyba $c : b$	
3	Sudėtis $a + b$	Atimtis $c - b$	

Kai ieškome skaitinio reiškinio reikšmės, būtina laikytis veiksmų tvarkos!

Panagrinėkime skaitinius reiškinius, kuriuose yra tik tos pačios eilės veiksmai: sudėtis ir atimtis; daugyba ir dalyba.

Užduotis. Imkime tokius reiškinius:
a) $2+5-3$; b) $2-3+5$; c) $8 \cdot 4 : 2$; d) $8 : 2 \cdot 4$.
Apskaičiuokime jų reikšmes dvejaip: atlikdami veiksmus iš kairės į dešinę; o tada — iš dešinės į kairę:

a) pirmiau sudėkime, tada atimkime $\underline{2+5}-3=7-3=4$,
pirmiau atimkime, tada sudėkime $2+\underline{5-3}=2+2=4$;

b) pirmiau atimkime, tada sudėkime $\underline{2-3}+5=-1+5=4$,
pirmiau sudėkime, tada atimkime $2-\underline{3+5}\neq 2-8=-6$;

c) pirmiau padauginkime, tada padalykime $\underline{8 \cdot 4} : 2=32 : 2=16$,
pirmiau padalykime, tada padauginkime $8 \cdot \underline{4 : 2}=8 \cdot 2=16$;

d) pirmiau padalykime, tada padauginkime $\underline{8 : 2} \cdot 4=4 \cdot 4=16$,
pirmiau padauginkime, tada padalykime $8 : \underline{2 \cdot 4} \neq 8 : 8=1$.

Kaip manote, kodėl b) ir d) atvejais gavome nevienodus rezultatus?

Kai skaitinis reiškinys sudarytas iš vienodos eilės veiksmų, tai juos būtina atlikti iš kairės į dešinę.

Veiksmų skliaustai

Kai reiškinyje yra skliaustų, tai pirmiausia atliekami veiksmai, esantys skliaustuose. Pavyzdžiui:

$$(2-3) : \sqrt[3]{8}+5^2 \cdot \log_2 16=-1 : 2+25 \cdot 4=-0{,}5+100=99{,}5;$$

$$2-3 : \left(\sqrt[3]{8}+5^2\right) \cdot \log_2 16=2-3 : (2+25) \cdot 4=2-3 : 27 \cdot 4=$$
$$=2-\frac{1}{9} \cdot 4=2-\frac{4}{9}=1\frac{5}{9}.$$

Yra atvejų, kai veiksmų skliaustų galima nerašyti, pavyzdžiui:

$$10 \cdot 2 : (5-1)=\frac{10 \cdot 2}{5-1}; \qquad \sqrt{(29-4)}=\sqrt{29-4};$$

$$3^{(2+1)}=3^{2+1}; \qquad \log_{(2+1)}(9+18)=\log_{2+1}(9+18).$$

Kodėl paskutinėje lygybėje negalima praleisti pologaritminio reiškinio skliaustų? Apskaičiuokite: $\log_3(9+18)$; $\log_3 9+18$.

Pratimai ir uždaviniai

Veiksmų atlikimo tvarka reiškinyje

124. Apskaičiuokite mintinai.

a) $3 - 5 + 2 - 7$;
b) $121 + 12 - 1 + 3 - 20$;
c) $10 \cdot 2 : 2 \cdot (-3)$;
d) $25 : (-5) \cdot 10 : (-2)$;
e) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 : 2^{10}$;
f) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$;
g) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$;
h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$.

125. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $86 : 17{,}2 \cdot \frac{25}{72}$;
b) $117{,}45 : 13{,}5 - 3{,}5 \cdot 2{,}2$;
c) $1{,}27 : 2{,}5 + 0{,}92 \cdot \frac{1}{460}$;
d) $81 : 7{,}5 - 3{,}8 : \frac{19}{75}$.

126. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $5 + 4 \cdot \log_5 25 - 10 : \sqrt{100} + 3^0$;
b) $0{,}1 \cdot \log_{25} 5 + \sqrt[3]{-1} \cdot 0{,}1^{-1} - (-2)^3$;
c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \lg \frac{1}{10} \cdot \sqrt[4]{0}$;
d) $2 : \frac{3}{5} + 1{,}8 \cdot \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \lg 1$;
e) $|-2| \cdot 5^3 : \lg 10 - |3|^0$;
f) $\lg \sqrt{10} \cdot |-5|^1 + 0{,}25^{-\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{0{,}001}$.

127. Skaičiuojant skaitinio reiškinio reikšmę, buvo padaryta klaidų. Ištaisykite jas.
a) $5 + 5 \cdot \sqrt{25} - 5^2 : \log_5 5 = 10 \cdot 2 + 25 : 5 = 20 + 5 = 25$;
b) $\sqrt{0} - 10^0 \cdot \lg 1 - 0{,}25 : 7{,}5 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{10} - \frac{0{,}25}{7{,}5} = \frac{1}{10} - \frac{25}{750} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} =$
$= \frac{1-1}{10-30} = \frac{0}{-20} = 0$.

128. Kai kurių reiškinių reikšmes galima apskaičiuoti ir skaičiuokliu. Skaičiuokliu apskaičiuokite šių reiškinių reikšmes:
a) $5 \cdot 13 + 7 : 0{,}25$; b) $3^2 \cdot 5 - \lg 0{,}1 : 4$; c) $3\frac{1}{3} + 2\frac{5}{7}$.

129. a) Apskaičiuodami reiškinio, į kurį įeina atimties veiksmas, reikšmę, galime atimtį keisti sudėtimi. Pavyzdžiui:

$$5 - 3 + 7 - 10 = 5 + (-3) + 7 + (-10) = 2 + 7 + (-10) = -1.$$

Pabaikite sakinį:
Iš skaičiaus a atimti skaičių b — tai tas pats, kas prie a ...

b) Analogiškai galima dalybą keisti daugyba. Pavyzdžiui:

$$5 : 3 + 7 : \frac{1}{5} = 5 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot 5 = \frac{5}{3} + 35 = 1\frac{2}{3} + 35 = 36\frac{2}{3}.$$

Pabaikite sakinį:
Skaičių a padalyti iš skaičiaus b — tai tas pats, kas a ...

130. Apskaičiuokite mintinai.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$;

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$;

d) $\sqrt[3]{10\,000} : \sqrt[3]{10}$.



$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ (a, b \geqslant 0); \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ (a \geqslant 0,\ b > 0).$$

131. Ar teisinga lygybė:

a) $\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$?

b) $\sqrt{1000} = 10 \cdot \sqrt{2}$?

c) $5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{75}$?

d) $-4 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{80}$?

132. Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.

1) a) $\log_2 8 = \ldots$,
$\log_2 16 = \ldots$,
$\log_2 8 + \log_2 16 = \ldots$,
$\log_2 (8 \cdot 16) = \ldots$;

b) $\lg 10 = \ldots$,
$\lg \frac{1}{10} = \ldots$,
$\lg 10 + \lg \frac{1}{10} = \ldots$,
$\lg \left(10 \cdot \frac{1}{10}\right) = \ldots$;

c) $\log_b a + \log_b c = \ldots$

2) a) $\log_3 27 = \ldots$,
$\log_3 9 = \ldots$,
$\log_3 27 - \log_3 9 = \ldots$,
$\log_3 \frac{27}{9} = \ldots$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \ldots$,
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \ldots$,
$\log_{\frac{1}{3}} 81 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \ldots$,
$\log_{\frac{1}{3}} \left(81 : \frac{1}{9}\right) = \ldots$;

c) $\log_b a - \log_b c = \ldots$

3) a) $\lg 10^2 = \ldots$,
$\lg 10 = \ldots$,
$2 \cdot \lg 10 = \ldots$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \ldots$,
$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \ldots$,
$3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2 = \ldots$;

c) $\log_b a^n = \ldots$

4) a) $\log_4 16 = \ldots$,
$4^{\log_4 16} = \ldots$;

b) $\log_4 \frac{1}{16} = \ldots$,
$4^{\log_4 \frac{1}{16}} = \ldots$;

c) $\log_2 32 = \ldots$,
$\log_2 2 = \ldots$,
$\log_2 \frac{1}{2} = \ldots$,
$2^{\log_2 a} = \ldots$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \ldots$,
$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = \ldots$,
$\log_{\frac{1}{3}} 1 = \ldots$,
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} a} = \ldots$;

e) $a^{\log_a b} = \ldots$

Veiksmų skliaustai

133. Apskaičiuokite.

a) $\left(10\frac{3}{10} - 8\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}$;
b) $\frac{1}{36} : \left(\frac{11}{12} - \frac{5}{9}\right) + \frac{12}{13}$;
c) $\left(\frac{7}{18} \cdot 1\frac{1}{7} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{5}$;
d) $\left(0{,}26 - \frac{1}{20}\right) \cdot 3\frac{4}{7}$;
e) $\left(1\frac{2}{7} + 1\frac{1}{21}\right) \cdot \frac{6}{7}$;
f) $86 : 17{,}2 \cdot \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{2}\right)$;
g) $\left(1\frac{5}{33} - 2\frac{3}{22}\right) : \frac{13}{33}$;
h) $\left(1\frac{7}{12} + \frac{3}{20}\right) \cdot 1\frac{19}{26} - 1\frac{9}{26}$.

134. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $5 + 4 \cdot (\log_5 25 - 10) : (\sqrt{100} - 3^0)$;

b) $\left(\lg 0{,}1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) \cdot \sqrt[6]{1} - \frac{1^2}{2} : 2{,}5$;

c) $0{,}2 \cdot \left(\left(\log_8 1 + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right) : 2^{-5} + 0{,}4^2\right)$;

d) $\left(5^{-2} - \left(3 \cdot \log_8 \frac{1}{8} - \sqrt{0{,}01}\right)\right) : (-2)$;

e) $|-5 + 10 \cdot \lg 100| - \left(7^{-1} - \sqrt{24 + \lg 10}\right)$.

135. Kurių skliaustų buvo galima nerašyti:

a) $\left(\frac{(8-7)^2}{(4+8^{-2})}\right)^2$?
b) $\frac{7-(\log_5 25-3)}{8+(\log_5 25-3)} + (2)^3$?
c) $2\sqrt{(5 - \lg 10)} + \left(\frac{1}{2}\right)^3$?
d) $\log_2(4 + \sqrt{16}) - 2(2 + \sqrt{9})^2$?

Apskaičiuokite šių reiškinių reikšmes.



Kai kada reiškiniuose yra praleidžiamas daugybos ženklas. Pavyzdžiui:

$2 \cdot (3 + 4) = 2(3 + 4)$;
$(2 + 3) \cdot (5 - 4) = (2 + 3)(5 - 4)$;
$2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
$2 \cdot \log_3 9 = 2 \log_3 9$;
$3 \cdot \sin 30° = 3 \sin 30°$.

Daugybos ženklas dažnai praleidžiamas ir raidiniuose reiškiniuose. Pavyzdžiui:

$2 \cdot a = 2a$;
$a \cdot b = ab$;
$(a + b) \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)$.
$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ $(= \sin(2\alpha))$.

2.2. Raidiniai reiškiniai

Atskliautimas. Panašiųjų narių sutraukimas

Prisiminkime greitosios daugybos formules

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Įsitikinkime, kad lygybė $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ yra teisinga. Nesunku patikrinti lygybę, imant konkrečias a ir b reikšmes. Pavyzdžiui, kai $a = 3$, $b = 4$, tai

$$(a+b)^2 = (3+4)^2 = 7^2 = 49,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2 = 9 + 24 + 16 = 49;$$

t. y. lygybės kairiosios ir dešiniosios pusių reiškinių reikšmės yra lygios. Bet visų a ir b reikšmių juk nepatikrinsi...
Pertvarkykime kairiąją lygybės pusę pagal vadinamąjį skirstymo dėsnį:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b.$$

Dabar dar kartą skirstykime:

$$(a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Gavome $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Greitosios daugybos formulėmis tikriausiai ne kartą naudojotės pertvarkydami raidinius reiškinius, t. y. reiškinius su kintamaisiais.

1 PAVYZDYS. Suprastinkime reiškinį: $2a(1+a)^2 - (2a-3)^2 - 2a^3$.
Pirmiausia, remdamiesi greitosios daugybos formulėmis, pakelkime kvadratu:

$$2a(1+a)^2 - (2a-3)^2 - 2a^3 = 2a(1+2a+a^2) - (4a^2 - 12a + 9) - 2a^3.$$

Atskliauskime:

$$2a(1+2a+a^2) - (4a^2 - 12a + 9) - 2a^3 =$$
$$= 2a + 4a^2 + 2a^3 - 4a^2 + 12a - 9 - 2a^3.$$

Sutraukime panašiuosius narius:

$$\underline{\underline{\underline{2a}}} + \underline{\underline{4a^2}} + \underline{2a^3} - \underline{\underline{4a^2}} + \underline{\underline{\underline{12a}}} - 9 - \underline{2a^3} = 14a - 9.$$

Taigi gavome, kad $2a(1+a)^2 - (2a-3)^2 - 2a^3 = 14a - 9$.

Sakoma, kad reiškinį pakeitėme jam tapačiai lygiu reiškiniu.

Reiškiniai vadinami tapačiai lygiais (arba lygiais), jei su visomis leistinomis kintamųjų reikšmėmis reiškinių reikšmės yra lygios.


Įsitikinkite, kad reiškiniai $2a(1+a)^2 - (2a-3)^2 - 2a^3$ ir $14a - 9$ įgyja tas pačias reikšmes, kai $a = -1$.

Skaidymas dauginamaisiais

Kai kada, pavyzdžiui, prastinant reiškinius, tenka atlikti veiksmą, atvirkštinį atskliautimui, t. y. tenka skaidyti dauginamaisiais.

2 PAVYZDYS. Suprastinkime trupmeną:

$$\frac{a^2 - a}{a^2 - 1}.$$

Pirmiausia trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje esančius reiškinius išskaidykime dauginamaisiais. Į skaitiklio abu narius įeina vienodas dauginamasis a — jį iškelkime prieš skliaustus:

$$a^2 - a = a \cdot (a - 1).$$

Vardiklyje yra kvadratų skirtumas:

$$a^2 - 1 = a^2 - 1^2.$$

Remdamiesi kvadratų skirtumo formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, vardiklį skaidome dauginamaisiais:

$$a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1).$$

Taigi

$$\frac{a^2 - a}{a^2 - 1} = \frac{a(a - 1)}{(a - 1)(a + 1)}.$$

Trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje yra vienodų dauginamųjų (tiksliau, tai $a - 1$), todėl trupmeną galima suprastinti:

$$\frac{a(a - 1)}{(a - 1)(a + 1)} = \frac{a}{a + 1}.$$

Vadinasi,

$$\frac{a^2 - a}{a^2 - 1} = \frac{a}{a + 1}.$$

Trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginus ar padalijus iš to paties nelygaus 0 *reiškinio, trupmenos reikšmė nepasikeičia.*

Skaidymas dauginamaisiais dažnai padeda spręsti aukštesnio negu pirmojo laipsnio lygtis.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį:

$$x^2 - x = 0.$$

Kairėje lygties pusėje prieš skliaustus iškėlę x turime: $x(x - 1) = 0$. Sandauga lygi 0, kai bent vienas dauginamasis lygus 0, t. y. lygties sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis $x = 0$ arba $x - 1 = 0$, $x = 1$.

Atsakymas. $x = 0$, $x = 1$.

Reiškiniai su laipsniais

Šiame skyrelyje skaičiuosime skaitinių reiškinių su laipsniais reikšmes ir prastinsime raidinius reiškinius su laipsniais. Laipsnio

$$a^r$$

pagrindą a laikysime teigiamu, o rodiklis $r \in \boldsymbol{R}$.

Prisiminkime laipsnių veiksmų taisykles — jomis remsimės spręsdami uždavinius.

1) Daugindami laipsnius su vienodais pagrindais, laipsnių rodiklius sudedame:

$$\boxed{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}, \quad \text{pvz.,} \quad 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2.$$

2) Dalydami laipsnius su vienodais pagrindais, laipsnių rodiklius atimame:

$$\boxed{a^r : a^s = a^{r-s}}, \quad \text{pvz.,} \quad 2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 2^0 = 1.$$

3) Laipsnį keldami laipsniu, laipsnio rodiklius sudauginame:

$$\boxed{\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}}, \quad \text{pvz.,} \quad \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 3^2 = 9.$$

4) Daugindami laipsnius su vienodais rodikliais, laipsnių pagrindus sudauginame:

$$\boxed{a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r}, \quad \text{pvz.,} \quad 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000.$$

5) Dalydami laipsnius su vienodais rodikliais, laipsnių pagrindus padalijame:

$$\boxed{a^r : b^r = (a : b)^r}, \quad \text{pvz.,} \quad 10^3 : 5^3 = (10 : 5)^3 = 2^3 = 8.$$

Pateiktomis formulėmis kartais remsimės iš kito galo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r, \quad a^{r \cdot s} = \left(a^r\right)^s = \left(a^s\right)^r;$$

Pavyzdžiui:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}, \quad (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4, \quad 2^8 = \left(2^2\right)^4 = \left(2^4\right)^2.$$

Šaknis galima pakeisti laipsniais su trupmeniniais rodikliais:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}, \quad \text{pvz.,} \quad \sqrt[5]{3a} = (3a)^{\frac{1}{5}};$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}, \quad \text{pvz.,} \quad \sqrt[3]{32a^5} = \sqrt[3]{(2a)^5} = (2a)^{\frac{5}{3}}.$$

Pratimai ir uždaviniai

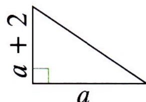
Atskliautimas. Panašiųjų narių sutraukimas

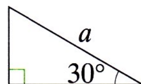
136. Sutraukite panašiuosius narius.

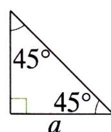
a) $2x - 5x - 4y + 7y$;   b) $-2x^2 + 5x^2 + 4y^3 - 5y^3$;

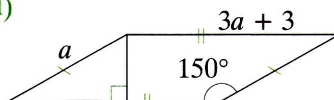
c) $4 - 5ab + 3a + 2b - ab + 5$;   d) $a^2 - 2ab + a^2 - 2b^2 - ab$.

137. Kam lygus pavaizduotos figūros perimetras, plotas?

a) 

b) 

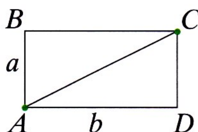
c) 

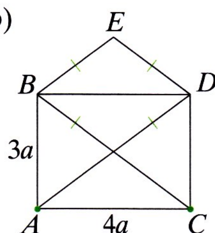
d) 

Apskaičiuokite perimetrą ir plotą, kai:

$a = 1$ cm; $a = \frac{1}{3}$ m; $a = 2{,}5$ m; $a = \sqrt{2}$ dm.

138. Voras praropojo visomis pavaizduotomis linijomis bent po vieną kartą, o jo kelias buvo trumpiausias įmanomas.

a) 

b) 

1) Kokį atstumą nuropojo voras, jei jis pradėjo ropoti iš taško A ir sustojo taške C?
2) Apskaičiuokite voro nuropotą atstumą, kai $a = 10$ cm, $b = 15$ cm.

139. Įsivaizduokite, kad a cm ūgio žmogus apeina kurią nors planetą, kurios spindulys yra r km, pusiaują žyminčia linija. Parašykite reiškiniu:

1) kelią, kurį nueis žmogaus pėda;
2) kelią, kurį nueis žmogaus viršugalvis;
3) kiek toliau nueis viršugalvis už pėdą.

Apskaičiuokite visų trijų reiškinių reikšmes, jei keliautojas yra Jūsų ūgio ir apeina kiekvieną Saulės sistemos planetą. Planetų spinduliai (suapvalinti iki šimtų kilometrų) pateikti lentelėje:

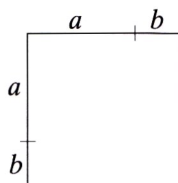
Merkurijus	Plutonas	Marsas	Venera	Žemė
2400	3000	3400	6000	6400

Uranas	Neptūnas	Saturnas	Jupiteris
24 600	25 200	60 300	71 400

140. 1) Formulę

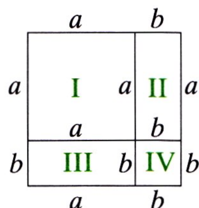
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

galima pavaizduoti ir geometriškai.
Nusibraižome kvadratą su kraštine $a+b$:



Šio kvadrato plotas S yra
$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$.

Padalykime šį kvadratą į keturias stačiakampes dalis.



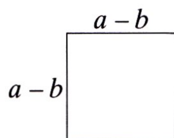
Gautųjų dalių plotai:
I — $a \cdot a = a^2$;
II — $a \cdot b$;
III — $a \cdot b$;
IV — $b \cdot b = b^2$.

Šių keturių dalių plotų suma lygi kvadrato plotui, t. y. $S =$ I + II + III + IV.
Pabaikite įrodymą.

2) Įsitikinti formulės

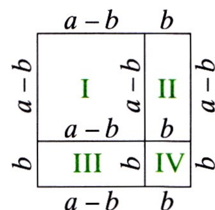
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

teisingumu galima taip.
Nubraižome kvadratą su kraštine $a-b$ (sakykime, kad $a > b$):



Šio kvadrato plotas yra
$(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^2$.

Papildome šį kvadratą iki kvadrato, kurio kraštinė lygi a, t. y. pradinio kvadrato kraštines pailginame ilgiu b ir suskirstome gautą kvadratą į keturias stačiakampes dalis, kaip parodyta brėžinyje:



I dalies plotas lygus didžiojo kvadrato plotui minus II, III ir IV dalių plotai.

Pabaikite įrodymą.

141. Atskliauskite.

a) $a(b+2a)$; b) $-a(b^2-a^2)$; c) $3x(4x-x^2)$;

d) $-4y(x-5xy)$; e) $2a(3-a+2b)$; f) $-5a(5a-2ab+b)$.



$$2xy(x-y+x^2y) = 2xy\cdot x - 2xy\cdot y + 2xy\cdot x^2y = \\ = 2x^2y - 2xy^2 + 2x^3y^2.$$

142. Atskliauskite.

a) $(a+b)\cdot(c+d)$; b) $(a-b)\cdot(c+b)$;

c) $(2a-b)(a-2b^2)$; d) $(-5a-b^2)(-3a^2-4b^3)$.

143. Įrodykite greitosios daugybos formules.

a) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; b) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;

c) $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$; d) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

e) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.



$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \\ = a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b) = \\ = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = \\ = a^2+ab+ab+b^2 = \\ = a^2+2ab+b^2.$$

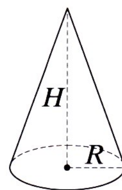
144. Suprastinkite reiškinį.

a) $(a+b)^2-(a-b)^2$; b) $(a+b)^3-(a-b)^3$.

145. Kūgio tūris apskaičiuojamas pagal formulę $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
Apskaičiuokite:

a) H, jei $V = 5{,}88\pi$, $R = 2{,}8$;

b) R, jei $V = 3{,}675\pi$, $H = 2{,}5$.



146. 1) Taikydami formules

$$(1+a)^2 \approx 1+2a, \quad (1-a)^2 \approx 1-2a,$$

galime apytiksliai apskaičiuoti skaičių $1+a$, $1-a$ kvadratą, kai a reikšmė, palyginus su vienetu, yra maža. Pagal šias formules apskaičiuokite skaičių kvadratus ir gautų apytikslių reikšmių absoliučiąsias paklaidas:

a) $1{,}001^2$; b) $1{,}002^2$; c) $0{,}999^2$; d) $0{,}998^2$; e) $1{,}01^2$; f) $0{,}9^2$.

2) Taikydami formules

$$(1+a)^3 \approx 1+3a, \quad (1-a)^3 \approx 1-3a,$$

apskaičiuokite kubus ir gautų apytikslių reikšmių absoliučiąsias paklaidas:

a) $1{,}001^3$; b) $1{,}01^3$; c) $1{,}1^3$; d) $0{,}999^3$; e) $0{,}99^3$; f) $0{,}9^3$.

Skaidymas dauginamaisiais

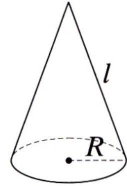
147. Iškelkite bendrąjį dauginamąjį prieš skliaustus.

a) $5a - 5b$; b) $20a^2 - 8b^2$; c) $-2b^3 - 2$;

d) $b^2 - b$; e) $b^2 + b^5$; f) $2b^{13} - 8b^3$;

g) $ab^2 + 5a^2b$; h) $-3xy - 7x^2y$.

148. Kūgio viso paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę $Q = \pi R^2 + \pi Rl$.



a) Ką šioje formulėje reiškia narys πR^2? πRl?

b) Ką šioje formulėje žymi raidės R, l, π?

c) Išreiškę kūgio sudaromąją l, apskaičiuokite jos ilgį, jei $Q = 27{,}3\pi$, $R = 3{,}9$.

149. Remdamiesi greitosios daugybos formulėmis, išskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2 - y^2$; b) $4a^2 - 25$; c) $-a^2 + \frac{9}{16}b^2$;

d) $-64n^2 + 49m^2$; e) $m^2 + 4mn + 4n^2$; f) $\frac{a^2}{9} - \frac{2}{3}ab + b^2$;

g) $0{,}04x^2 + 0{,}4xy + y^2$; h) $4a^2 - 28a + 49$; i) $2 + 2\sqrt{6}a + 3a^2$.

150. Pasinaudokite formulėmis

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ir išskaidykite dauginamaisiais.

a) $8 + m^3$; b) $27a^3 - b^3$; c) $\frac{1}{64} - 0{,}008x^3$;

d) $x^6 + y^6$; e) $a^3 - 0{,}001$; f) $125a^3 - 8$;

g) $0{,}343 - y^6$; h) $x^{12} + 0{,}125$; i) $a + b$.

151. Išskaidykite dauginamaisiais.

a) $2x^2 + 4x + 2$; b) $27a^2b - 3b^3$;

c) $5x^2 - 90x + 405$; d) $(x - 2)^2 + 2(x - 2)$;

e) $0{,}72x^5 - 2xy^6$; f) $16m^3 - 2$;

g) $(a^2 - ac) + (ab - bc)$; h) $a^2 - 2ab + b^2 + a - b$.



Jei galima, pirmiausia keliame prieš skliaustus, tada bandome pritaikyti greitosios daugybos formules arba kitus skaidymo būdus.

152. Atlikite veiksmus.

a) $\frac{3x}{7} + \frac{1}{7}$;
b) $\frac{7}{13} : \frac{x}{26}$;
c) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{5y}$;
d) $1 + \frac{1}{x^2}$;
e) $\frac{x-1}{2} \cdot \frac{6}{x+2}$;
f) $\frac{a-b}{a} \cdot \frac{b^2}{a+b}$;
g) $x - \frac{2}{1-x}$;
h) $m - 5 + \frac{1}{m-5}$;
i) $\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1}$;
j) $\frac{k}{10} + \frac{n}{12}$;
k) $\frac{3m}{2} : \frac{14}{n^3}$;
l) $\frac{2}{a+b} - 3a$;
m) $x + \frac{1}{x+2} - 1$;
n) $3 - \frac{5y}{y-1}$.



Prisiminkite veiksmus su trupmenomis:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Pavyzdžiui, parašykime trupmena šį reiškinį

$\frac{x}{x^2-16} - \frac{4}{x^2+8x+16}$.

1) Išskaidome vardiklius dauginamaisiais ir parašome sumą:

$\frac{x}{(x-4)(x+4)} + \frac{-4}{(x+4)^2}$.

2) Nustatome abiejų trupmenų bendrąjį vardiklį:

$(x-4)(x+4)^2$.

3) Subendravardikliname trupmenas:

$\frac{x \cdot (x+4)}{(x-4)(x+4) \cdot (x+4)} + \frac{-4 \cdot (x-4)}{(x+4)^2 \cdot (x-4)} = \frac{x^2+4x}{(x-4)(x+4)^2} + \frac{-4x+16}{(x-4)(x+4)^2}$.

4) Sudedame trupmenas su vienodais vardikliais:

$\frac{x^2+4x-4x+16}{(x-4)(x+4)^2} = \frac{x^2+16}{(x-4)(x+4)^2}$.

Pastaba. Ieškant trupmenų bendrojo vardiklio, galima vardiklius sudauginti. Pavyzdyje pateiktu atveju turėtume $(x^2 - 16) \cdot (x^2 + 8x + 16) = (x-4)(x+4)^3$.

Bet tolesni skaičiavimai būtų sudėtingi. Todėl pravartu ieškoti paprasčiausio bendrojo vardiklio. Tam ir skaidome vardiklius dauginamaisiais (žr. 1) ir 2)).

---

153. Apskaičiuokite reiškinių reikšmes.

a) $c + dc - d$ ir $(1 + d)c - d$, kai $c = -\frac{5}{6}$, $d = -2$;
b) $(c + d)(c - d)$ ir $c + d(c - d)$, kai $c = -0{,}25$, $d = 3{,}75$;
c) $\frac{x-7{,}5}{x+3}$ ir $\frac{x}{x+3} - \frac{7{,}5}{x+3}$, kai $x = -2{,}7$.

154. Suprastinkite trupmenas.

a) $\frac{2x+6}{20}$;
b) $\frac{m^4-1}{m^2-1}$;
c) $\frac{y^{16}-y^{14}}{y^{17}}$;
d) $\frac{2a-2b}{a^2-2ab+b^2}$;
e) $\frac{3x^2-8x-3}{9x^2-1}$;
f) $\frac{3x^2-8x-3}{6x^2+5x+1}$.

155. Atlikite veiksmus su trupmenomis.

a) $\frac{4x-8}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{9x-18}$; b) $\frac{y^2-y-12}{16y+30} : \frac{4-y}{2}$; c) $\frac{1}{y^2-9} + \frac{2}{y+3}$;

d) $\frac{1}{m^2-9} + \frac{2}{m^2+6m+9}$; e) $\frac{2}{a^2+6a+9} - \frac{3}{a^2-6a+9}$; f) $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$;

g) $\frac{1+\frac{1}{x+1}}{x}$; h) $\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$; i) $\frac{m+1}{2+\frac{2}{m}}$; j) $\frac{l+\frac{2}{l}-1}{2+\frac{4}{k^2}-\frac{2}{k}}$; k) $\frac{m+\frac{m}{n}}{m-\frac{m}{n}}$; l) $\frac{\frac{(x+2)^3}{(x+3)^3}}{\frac{x+3}{x+2}}$.



Kai kada patogu trupmenas persirašyti kaip dalmenį. Pavyzdžiui,

$$\frac{1-\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}}{\frac{1}{a}-\frac{4}{a^3}} = \left(1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{a^3}\right) = \frac{a^2-4a+4}{a^2} : \frac{a^2-4}{a^3} = \frac{a^2-4a+4}{a^2} \cdot \frac{a^3}{a^2-4} =$$

$$= \frac{(a^2-4a+4)\cdot a^3}{a^2\cdot(a^2-4)} = \frac{(a-2)^2\cdot a^3}{a^2\cdot(a-2)(a+2)} = \frac{(a-2)a}{a+2}.$$

Bet galima skaitiklio ir vardiklio reiškinius padauginti iš tokio reiškinio, kad skaitiklyje ir vardiklyje neliktų trupmenų:

$$\frac{\left(1-\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}\right)\cdot a^3}{\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{a^3}\right)\cdot a^3} = \frac{a^3-4a^2+4a}{a^2-4} = \frac{a(a^2-4a+4)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a(a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} = \cdots.$$

156. Išskaidykite kvadratinį trinarį dauginamaisiais (jei įmanoma).

a) $x^2 - 3x + 2$; b) $x^2 - x - 2$; c) $2a^2 + 9a - 5$;

d) $2x^2 + 7x + 6$; e) $m^2 + m - 1$; f) $-m^2 - m + 3$;

g) $3a^2 + a + 2$; h) $-y^2 - y - 1$.



Išskaidykime trinarį $2x^2 + 10x + 12$ dauginamaisiais:
I būdas.
1) Iškeliame 2 prieš skliaustus $2(x^2 + 5x + 6)$.
2) Dėmenį $5x$ išskaidome į du: $5x = 2x + 3x$; turime $2(x^2 + 2x + 3x + 6)$.
3) Dėmenis sugrupuojame $2((x^2+2x)+(3x+6))$ ir iškeliame iš kiekvienos grupės bendrąjį daugiklį $2(x(x+2) + 3(x+2))$.
4) Iškeliame bendrąjį daugiklį $x + 2$ už skliaustų $2(x+2)(x+3)$.
II būdas. Jei kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ turi šaknis x_1 ir x_2, tai jį galime išskaidyti dauginamaisiais pagal formulę

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Randame kvadratinio trinario šaknis: $2x^2 + 10x + 12 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.
Vadinasi, $2x^2 + 10x + 12 = 2(x+2)(x+3)$.
Pastaba. Jei kvadratinis trinaris šaknų neturi ($D < 0$), tai jo negalima išskaidyti tiesiniais dauginamaisiais.

157. Įrašykite praleistus narius, kad gautumėte teisingą lygybę.

a) $\ldots + 42ac + 49c^2 = (\ldots + \ldots)^2$; b) $25x^2 - \ldots + \ldots = (\ldots - 8y)^2$;

c) $100 - 60y + \ldots = (\ldots - \ldots)^2$; d) $\ldots - 54ab + \ldots = (\ldots - 9a)^2$.

Reiškiniai su laipsniais

158. 1) Pabaikite sakinį: *Dauginant laipsnius su vienodais pagrindais...*

2) Sudauginkite laipsnius su vienodais pagrindais.

a) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^9$; b) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$;

c) $a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$; d) $a^{0,5} \cdot a^2 \cdot a^{-0,7}$.

3) Pabaikite sakinį: *Dalijant laipsnius su vienodais pagrindais...*

4) Padalykite laipsnius su vienodais pagrindais.

a) $b^{10} : b^8$; b) $b^{15} : b^{14}$; c) $b^7 : b^7$; d) $b^2 : b^5$;

e) $b^{-\frac{1}{2}} : b^{-\frac{3}{2}} : b^{-\frac{5}{2}} : b^{\frac{7}{2}}$.

5) Pabaikite sakinį: *Dauginant laipsnius su vienodais rodikliais...*

6) Sudauginkite laipsnius su vienodais rodikliais.

a) $2^a \cdot 5^a$; b) $25^a \cdot 3^a \cdot 4^a$.

7) Pabaikite sakinį: *Dalijant laipsnius su vienodais rodikliais...*

8) Padalykite laipsnius su vienodais rodikliais.

a) $10^a : 5^a$; b) $100^b : 4^b : 5^b$.

159. Suprastinkite reiškinį su laipsniais.

a) $\frac{5x^2}{6y^5} \cdot \frac{3y}{10x}$; b) $\frac{2ab}{3c^3} : \frac{8a^2b^3}{9c^2}$; c) $4x^3y \cdot \frac{x}{8y}$; d) $5a^5b^5 : \frac{5}{a^5b^5}$.

160. Kūno masė m apskaičiuojama pagal formulę

$m = \rho V$;

čia ρ — tankis medžiagos, iš kurios pagamintas kūnas, V — kūno tūris. Apskaičiuokite kūgio pavidalo svarelio masę (gramo dešimtosios tikslumu), jei svarelis pagamintas:

1) iš geležies; 2) iš aliuminio.

a) $R = 2,7\,\text{cm}$, $H = 2,1\,\text{cm}$, geležies tankis $\rho = 7,8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$;

b) $R = 0,033\,\text{m}$, $H = 0,057\,\text{m}$, aliuminio tankis $\rho = 2,7\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.



Kūgio tūris

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

čia R — kūgio pagrindo spindulio ilgis, H — kūgio aukštinės ilgis.

161. Žmogaus kūno paviršiaus plotui apytiksliai apskaičiuoti medicinoje naudojama formulė

$S = 0,007184 \cdot m^{0,425} \cdot h^{0,725}$;

čia S — kūno paviršiaus plotas (m^2), m — masė (kg), h — ūgis (cm).

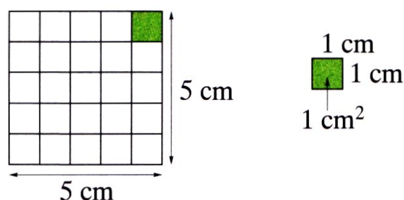
a) Koks žmogaus kūno paviršiaus plotas, jei jo ūgis 182,5 cm, masė 87,2 kg?

b) Naujagimio ūgis 0,52 m, o masė 3,5 kg. Koks apytikslis naujagimio kūno paviršiaus plotas?

c) Į aplinką žmogaus išspinduliuotas šilumos kiekis proporcingas kūno paviršiaus ploto ir masės santykiui. Kiek kartų skiriasi suaugusio žmogaus ir naujagimio išspinduliuojamas šilumos kiekis?

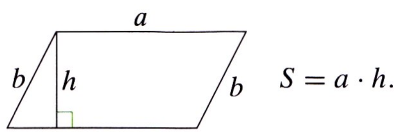
2.3. Geometrijos uždaviniai

162. Kvadrato, kurio kraštinė lygi 5 cm, plotas yra 25 cm^2.

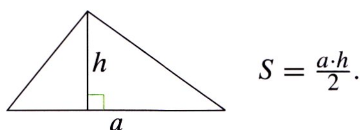


Iš tikrųjų kvadrate, kurio matmenys yra 5 cm × 5 cm, iš viso telpa lygiai $5 \times 5 = 25$ kvadratėliai, kurių matmenys yra $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} = 1\,\text{cm}^2$. Taigi kvadrato su kraštine, lygia a ilgio vienetų, plotas $S = a^2$ kvadratinių vienetų.

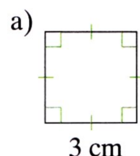
1) Parodykite, kad stačiakampio, kurio ilgis $a = 5$ cm, o plotis $b = 7$ cm, plotas $S = 35\,\text{cm}^2$.
2) Kam lygus stačiakampio su kraštinėmis, lygiomis a ir b ilgio vienetų, plotas?
3) Įrodykite, kad stačiojo trikampio, kurio statiniai lygūs a ir b, plotas lygus pusei stačiakampio su kraštinėmis a ir b ploto.
4) Įrodykite, kad lygiagretainio plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgių sandaugai.

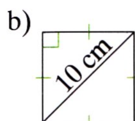


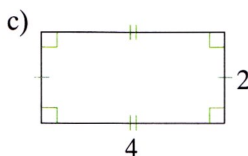
5) Įrodykite, kad trikampio plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgių sandaugos pusei.

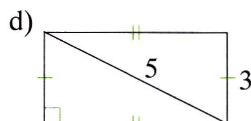


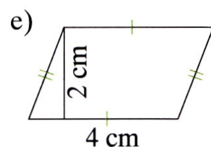
163. Apskaičiuokite pavaizduotos figūros plotą.

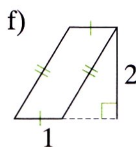
a) 

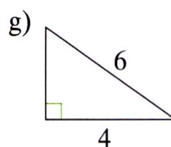
b) 

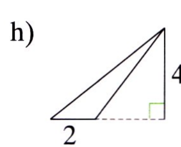
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

2.4. Pasitikrinkime

164. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\log_2\sqrt{2}-0{,}5$;

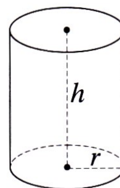
b) $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\log_2 0{,}5$;

c) $\left(\lg 0{,}01-\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right)\sqrt[6]{1}+\frac{5^2}{10}\cdot 2{,}5$.

165. Ritinio viso paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę:

$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)$;

čia r — ritinio pagrindo spindulio ilgis,
h — ritinio aukštinės ilgis.



a) Paaiškinkite, kaip ši formulė gauta.
b) Apskaičiuokite S, kai $r=1$ cm, $h=2$ cm.
c) Apskaičiuokite h, kai $S=100\pi$ cm^2, $r=2$ cm.
d) Apskaičiuokite r, kai $S=100\pi$ cm^2, $h=2$ cm.

166. Suprastinkite raidinį reiškinį.

a) $3a+5b-7a^2-3a^2-3a$; b) $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}:y^{\frac{1}{3}}$;

c) $3a(a-2)-4(a^2-1{,}5a)$; d) $(x+2y)^2-(y+2x)^2$.

167. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{7a}{7a-7b}$; b) $\frac{3a^2+6a^2b}{3a^2}$; c) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$;

d) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$; e) $\frac{x^2-4}{4x-8}$; f) $\frac{x^{16}-x^{14}}{x+1}$;

g) $\frac{9-x^2}{x^2-6x+9}$; h) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$.

168. Atlikite veiksmus su trupmenomis.

a) $\frac{5a}{3}+\frac{a}{3}$; b) $\frac{2x}{6}-\frac{5x}{4}$; c) $\frac{5}{3a}+\frac{7}{2a}$;

d) $\frac{4xy}{5a}\cdot\frac{3a^2}{x^2y}$; e) $\frac{3ab}{7x}:\frac{9a^2b}{49x^3}$.

169. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais (jei įmanoma).

a) x^2+2x+1; b) $1-4x+4x^2$;

c) $x^2+2x-15$; d) $x^2+2x+15$.

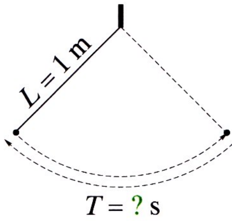
170. Suprastinkite reiškinį su laipsniais.

a) $a^2\cdot a^3\cdot a^{-1}\cdot a^{-2}$; b) $\frac{b^3\cdot b^7}{b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}}$; c) $2^x\cdot 5^x:10^x$; d) $\frac{2^a\cdot 2^b}{4^c}$.

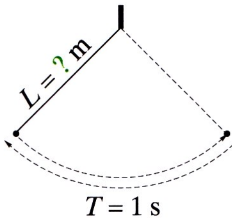
171. L metrų ilgio švytuoklės svyravimų periodas randamas pagal formulę:

$T = 2{,}01 \cdot \sqrt{L}$, kur T matuojamas sekundėmis.

1) Koks bus 1 m ilgio švytuoklės svyravimų periodas?

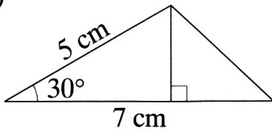


2) Kokio ilgio turi būti švytuoklė, kad jos svyravimų periodas būtų 1 s?

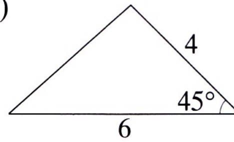


172. 1) Apskaičiuokite trikampio plotą.

a)

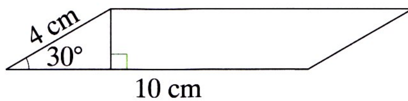


b)

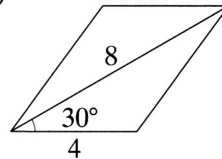


2) Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

a)

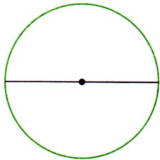


b)



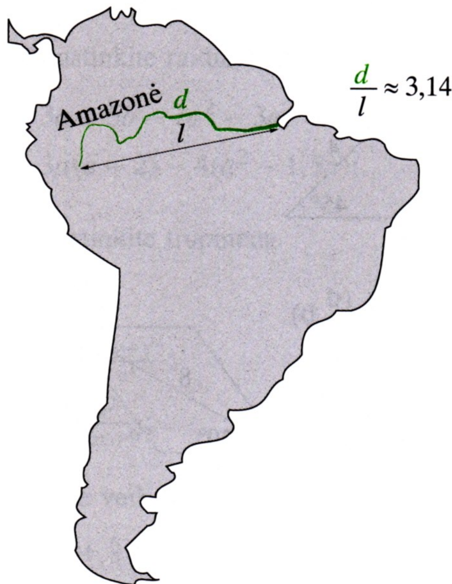
Skaičius π

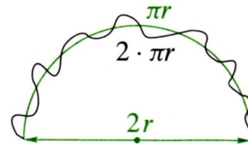
Jau senovėje buvo suprasta, kad apskritimo ilgio ir skersmens ilgio santykis visiems apskritimams reiškiamas tuo pačiu skaičiumi (3,1415...). Vėlesniais laikais, dėl jo svarbos matematikai, tam skaičiui buvo suteiktas specialus vardas π.



$$\frac{\text{Apskritimo ilgis}}{\text{Skersmens ilgis}} = \pi \approx 3{,}141592653589793...$$

Skaičius π gyvena ne tik apskritimuose...
Įdomybių ieškotojai π sieja su daugybe realių reiškinių, net su didžiosiomis vingiuotomis upėmis.
Išmatavę realų Amazonės ilgį d ir jį padaliję iš atstumo l tarp upės pradžios ir žiočių, gautume $\approx 3,14$.
Tai nieko keisto: vingiuota upė „privingiuoja“ kilometrų maždaug dukart daugiau negu tekėdama pusapskritimiu.





$$\approx 2\cdot \ldots = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

Jeigu, pavyzdžiui, nepatingėsite su skaičiuokliu apskaičiuoti sandaugą

$$2\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{98^2}{97\cdot 99}\cdot\frac{100^2}{99\cdot 101},$$

tai gausite apytikslę π reikšmę 3,14, o jeigu apskaičiuosite panašią sandaugą „iki 200“:

$$2\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{198^2}{197\cdot 199}\cdot\frac{200^2}{199\cdot 201},$$

tai gausite $\pi \approx 3,141$ ir t. t.

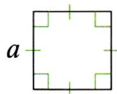
3 FUNKCIJOS

3.1. Funkcijos sąvoka ir funkcijos reiškimo būdai

Formulės, lentelės, grafikai

Įvairių formulių, lentelių, grafikų galima pamatyti laikraščiuose, žurnaluose, knygose, internete. Formule, lentele ar grafiku dažniausiai siekiama parodyti, kaip susiję du (ar keli) vienas nuo kito priklausantys dydžiai.

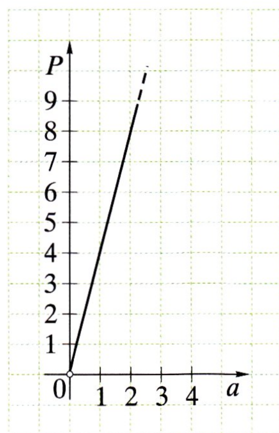
Pavyzdžiui, kvadrato



perimetro P priklausomybę nuo jo kraštinės ilgio a galima nusakyti taip:

$P = 4a$

$a =$	...	1	...	2	...	3	...
$P =$	...	4	...	8	...	12	...



Šią priklausomybę nusakykite žodžiais.

Kokią informaciją gauname iš formulės, lentelės ir grafiko? Iš kvadrato perimetro formulės

$P = 4a$ (a — kvadrato kraštinės ilgis, P — perimetras)

matome, kad kvadrato perimetras P yra keturgubai didesnis už jo kraštinės ilgį a. Iš tikrųjų, pavyzdžiui:

kai $a = 1$, tai $P = 4 \cdot 1 = 4$;

kai $a = 1{,}2$, tai $P = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$;

kai $a = \sqrt{3}$, tai $P = 4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Pabrėždami, kad P reikšmė priklauso nuo a reikšmės, formulę galima užrašyti taip:

$P(a) = 4a$.

Tokia išraiška yra patogi užrašant atitinkamas a ir P reikšmes, pavyzdžiui:

$P(1) = 4$, $P(1{,}2) = 4{,}8$, $P(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$.

Apskaičiuokite P reikšmę, kai $a = 0{,}5$; $1 + \sqrt{3}$.

Atitinkamas a ir P reikšmes galima surašyti ir lentelėje. Dažniausiai, kaip ir mūsų nagrinėjamu atveju, neįmanoma surašyti visų galimų reikšmių. Tokiu atveju į lentelę rašome „patogias“ reikšmes tam tikru žingsniu (žr. a) lentelę).

a)

$a =$	...	1	...	2	...	3	...
$P =$	...	4	...	8	...	12	...

b)

$a =$	...	1	...	2	...	3	...
$P = 4a =$	...	4	...	8	...	12	...

c)

$a =$	...	1	...	2	...	3	...
$4a =$	...	4	...	8	...	12	...

−1, +1, ×4, −4, +4

Įsivaizduokime, kad turime lentelę a), o formulės, siejančios dydžius a ir P, nežinome. Iš tos lentelės galėtume nesuklysdami teigti, kad:

kai $a = 1$, tai $P = 4$;

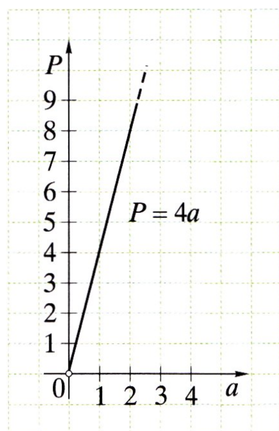
kai $a = 2$, tai $P = 8$;

kai $a = 3$, tai $P = 12$.

Deja, remdamiesi a) lentele, teigti, kad kai $a = 4$, tai $P = 16$ negalėtume. Todėl kai formulė žinoma, tai lentelėje ji dažnai yra nurodoma (žr. b) lentelę).

Remdamiesi c) lentele, pasakykite, kaip pakinta $P = 4a$, kai a pakinta vienetu.

Jei visas atitinkamas dydžių a ir P reikšmes pavaizduotume koordinačių plokštumos taškais $(a;\ P)$, tai gautume kvadrato perimetro P priklausomybės nuo kraštinės ilgio a grafiką:



Akivaizdu, kad mūsų atveju taškai $(a; 4a)$ išsidėstę tiesės $y = 4x$ dalyje, esančioje I ketvirtyje, nes a gali įgyti tik teigiamas reikšmes.
Kai yra žinoma grafiku pavaizduotų dydžių priklausomybę nusakanti formulė, tai ji dažniausiai nurodoma šalia grafiko.

1 užduotis. Nusakykite žodžiais, užrašykite formulę, lentele ir pavaizduokite grafiškai kvadrato ploto S priklausomybę nuo jo kraštinės ilgio a.

Dviejų dydžių funkcinė priklausomybė

Matematikoje nagrinėjamos tokios dviejų dydžių priklausomybės, kai kiekvienai vieno dydžio reikšmei remiantis kokia nors taisykle priskiriama kito dydžio vienintelė reikšmė.
Pavyzdžiui, sugalvokime kokį nors skaičių, jį pakelkime kvadratu ir atimkime vienetą. Kokį rezultatą y gausime, priklausys nuo sugalvoto skaičiaus x, nes

$$y = x^2 - 1.$$

Pavyzdžiui:

$$\text{kai } x = -2, \text{ tai } y = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3,$$

$$\text{kai } x = 5, \text{ tai } y = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24.$$

Akivaizdu, kad kiekvienam x yra vienintelė y reikšmė. Sakoma, kad kintamieji x ir y yra susiję funkcine priklausomybe. Kadangi y reikšmė priklauso nuo x reikšmės, tai x vadinamas *nepriklausomuoju* kintamuoju, o y — *priklausomuoju* kintamuoju ir rašoma

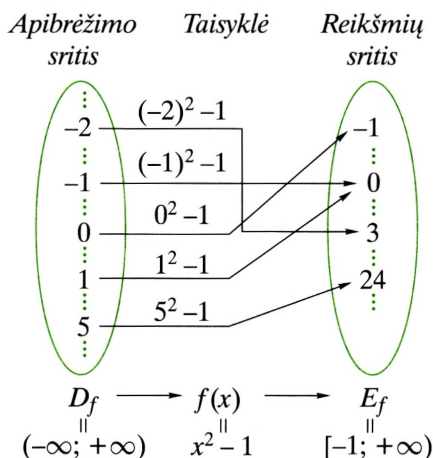
$$y = f(x);$$

čia raidė f žymi taisyklę, kuria remiantis kiekvienai x reikšmei priskiriama y reikšmė (galima sakyti, kad f yra funkcijos vardas). Mūsų pavyzdyje $f(x) = x^2 - 1$.

? Kam lygu $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1{,}2)$, $f(\sqrt{3})$?

Skaičių aibė, kurią sudaro visos nepriklausomojo kintamojo x reikšmės, vadinama funkcijos $y = f(x)$ *apibrėžimo sritimi* — žymime D_f. Skaičių aibė, kurią sudaro visos priklausomojo kintamojo y reikšmės, vadinama funkcijos *reikšmių sritimi* — žymime E_f.
Jei visas atitinkamas x ir y reikšmes pavaizduotume koordinačių plokštumos taškais $(x; y)$, tai gautume funkcijos $y = f(x)$ *grafiką*.

? *2 užduotis*. Patyrinėję schemą, sudarykite funkcijos $f(x) = x^2 - 1$ reikšmių lentelę, nubraižykite jos grafiką ir pasakykite tos funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.



Pratimai ir uždaviniai

Formulės, lentelės, grafikai

173. Nusakykite žodžiais formules ir pabaikite pildyti lentelę.

a) $P = 3a$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$a =$	1	2	$\sqrt{6}$		
$P =$				1	
$S =$					$\sqrt{3}$

b) $P = 2(a + b)$, $S = ah$

$a =$	2	$\sqrt{2}$		10
$b =$	1	$\sqrt{2}$	2	
$h =$	1	$\sqrt{1{,}5}$		2
$P =$			12	15
$S =$			$\sqrt{32}$	

c) $S = \frac{(a+b)h}{2}$, $c = \frac{a+b}{2}$

$a =$	2	1		3
$b =$	4		$\sqrt{2}$	
$c =$		3	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	5
$h =$	1	$\sqrt{2}$		
$S =$			$\sqrt{2} + 1$	$5\sqrt[3]{2}$

d) $C = 2\pi r$, $S = \pi r^2$

$r =$	1				
$C =$		1		π	
$S =$			1		π

e) $V = a^3$, $S_{pav} = 6a^2$

$a =$	1	$\sqrt{2}$				
$V =$			8	2		
$S_{pav} =$					54	18

f) $V = \pi R^2 H$, $S_{šon} = 2\pi RH$, $S_{pav} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

$R =$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{3}$
$H =$	2	$\sqrt{2}$		
$S_{šon} =$			20π	
$S_{pav} =$				
$V =$				π

g) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $S_{šon} = \pi rl$, $S_{pav} = \pi r^2 + \pi rl$

$r =$	3		1
$h =$	4	8	
$l =$		10	3
$S_{šon} =$			
$S_{pav} =$			
$V =$			

h) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$

$R =$	1			$\sqrt{3}$
$V =$		$\frac{4}{3}$		
$S =$			8π	

174. Lentele nusakytą dviejų dydžių priklausomybę užrašykite formule.

a)

$a =$	...	1	...	2	...	3	...
$b =$	...	2	...	4	...	6	...

(×2)

b)

$a =$	0	...	1	...	4	...	9	...	10	...
$c =$	0	...	1	...	2	...	3	...	$\sqrt{10}$	...

($\sqrt{\ }$)

c)

(+1)

$p =$	1	2	3	4	...
$k =$	3	5	7	9	...

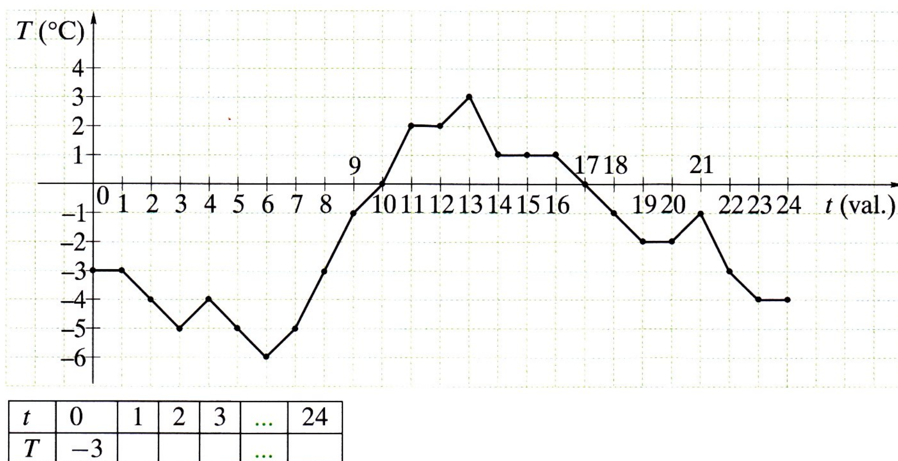
(+2)

d)

$m =$	0	1	2	3	4	5	...
$n =$	1	2	5	10	17	26	...

175. Remdamiesi grafiku, užpildykite lentelę.

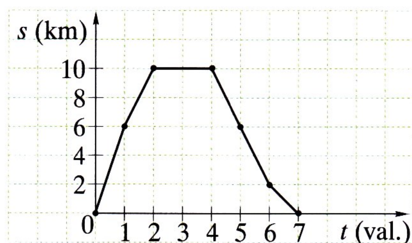
a) Laužtė vaizduoja paros temperatūros kitimą.



t	0	1	2	3	...	24
T	–3				...	

Remdamiesi lentele, apskaičiuokite vidutinę paros temperatūrą.

b) Grafiku pavaizduota, kokiu atstumu nuo stovyklavietės buvo turistai kiekvieną 7 valandų trukmės žygio valandą.



t	0	1	2	3	4	5	6	7
s	0							

1) Kurias žygio valandas turistai tolo nuo stovyklavietės?
2) Kurias žygio valandas turistai artėjo prie stovyklavietės?
3) Koks buvo didžiausias atstumas nuo stovyklavietės?
4) Remdamiesi grafiku, užpildykite lentelę (žr. grafiko dešinėje).
5) Koks buvo vidutinis *ėjimo* greitis ir koks vidutinis *kelionės* greitis?

176. Nustatykite, ar dydžiai $x > 0$ ir $y > 0$ yra *tiesiogiai* proporcingi, ar yra *atvirkščiai* proporcingi, ar nėra proporcingi.

a) $y = 2x$; b) $y = \frac{x}{2}$; c) $y = x^2$; d) $y = \frac{2}{x}$; e) $y = \sqrt{x}$;

f)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	5	10	15	20

g)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2

h)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

i)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	1	2	3	4

j)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	4	3	2	1

k)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	2	1	4	3



Du teigiami dydžiai vadinami *tiesiogiai proporcingais*, jei tų dydžių atitinkamų reikšmių santykiai yra lygūs.
Du teigiami dydžiai vadinami *atvirkščiai proporcingais*, jei tų dydžių atitinkamų reikšmių sandaugos yra lygios.

177. Užrašykite formule, kam lygus skaičius y, jei jį gauname:

a) skaičių x pakėlę kvadratu, tada pridėję vienetą ir rezultatą padaliję iš 5;

b) prie skaičiaus x pridėję vienetą, gautą sumą pakėlę kvadratu ir iš rezultato atėmę 1;

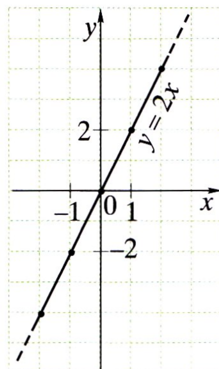
c) teigiamą skaičių x pakėlę kvadratu, pridėję 2, padauginę iš trijų, atėmę 6, padalinę iš 3 ir ištraukę kvadratinę šaknį. (Beje, šiuo atveju gausite sugalvotąjį skaičių. Įsitikinkite.)

Funkcijų grafikai

178. Braižant formule užrašytos funkcijos grafiką, kartais padeda funkcijos reikšmių lentelė, pavyzdžiui:

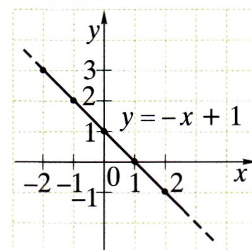
$f(x) = 2x$

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$y = 2x =$	...	-4	...	-2	...	0	...	2	...	4	...



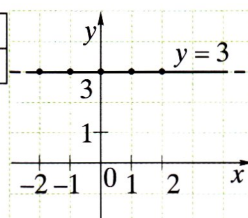
$g(x) = -x + 1$

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$y = -x + 1 =$	...	3	...	2	...	1	...	0	...	-1	...



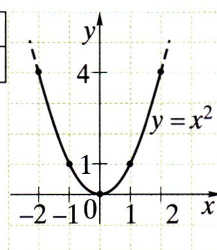
$h(x) = 3$

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$y = 3 =$	...	3	...	3	...	3	...	3	...	3	...



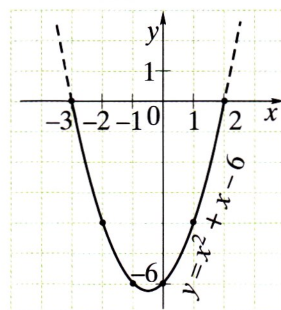
$m(x) = x^2$

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$y = x^2 =$	...	4	...	1	...	0	...	1	...	4	...



$n(x) = x^2 + x - 6$

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$y = x^2 + x - 6 =$	...	-4	...	-6	...	-6	...	-4	...	0	...



1) Kaip vadinamas grafikas funkcijos

$y = kx + b$ (čia k, b — skaičiai)?

Kiek mažiausiai taškų reikia pažymėti braižant tiesę?

2) Kaip vadinamas grafikas funkcijos

$y = ax^2 + bx + c$ (čia a, b, c — skaičiai, $a \neq 0$)?

3) Nubraižykite funkcijos grafiką.

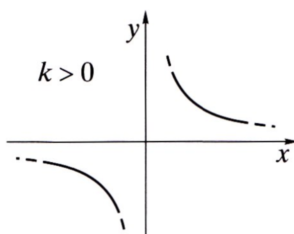
a) $y = \frac{1}{x}$; b) $y = -\frac{2}{x}$; c) $y = x^3$;

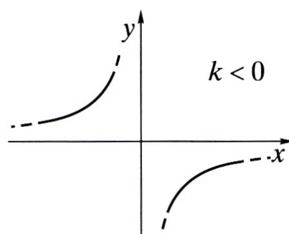
d) $y = x^4$; e) $y = x^5$; f) $y = \sqrt{x}$;

g) $y = \sqrt[3]{x}$; h) $y = \sqrt[4]{x}$; i) $y = |x|$.

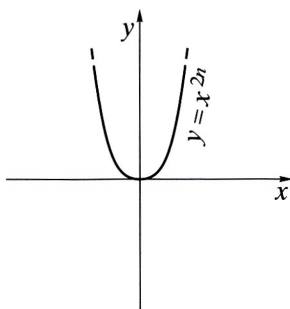


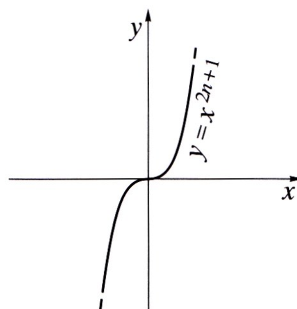
1) Funkcijos $y = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$, k — skaičius ($k \neq 0$), grafikas vadinamas hiperbole:



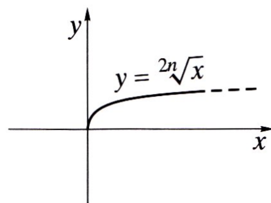


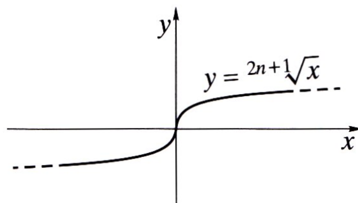
2) Funkcijų $y = x^{2n}$, $y = x^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, grafikai:





3) Funkcijų $y = \sqrt[2n]{x}$, $x \geqslant 0$, ir $y = \sqrt[2n+1]{x}$ ($n \in \boldsymbol{N}$) grafikai:

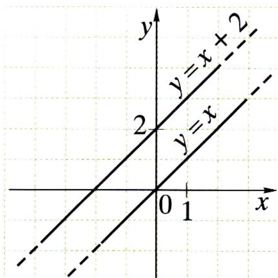




179. Braižant funkcijos grafiką, sudarinėti lentelę dažniausiai nėra būtina.

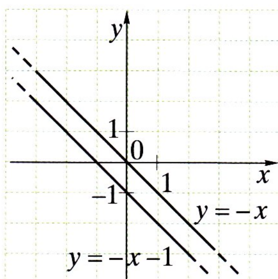
1) Pasižiūrėję į nubraižytus funkcijų grafikus, nubraižykite nurodytų funkcijų grafikus.

a)



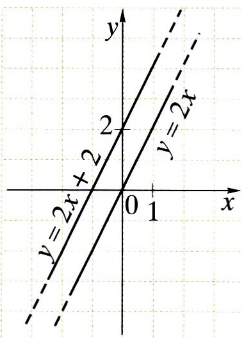
Nubraižykite:
$y = x + 3$,
$y = x - 1$.

b)



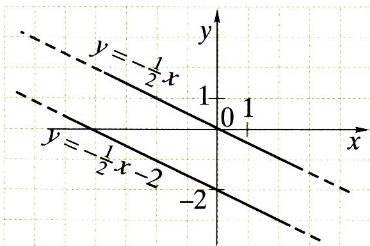
Nubraižykite:
$y = -x + 2$,
$y = -x - 3$.

c)



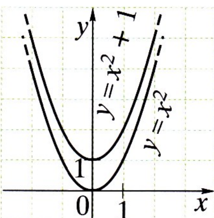
Nubraižykite:
$y = 2x + 1$,
$y = 2x - 4$.

d)



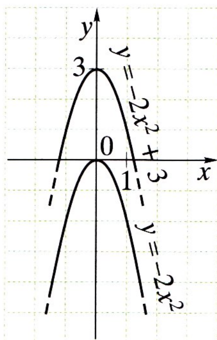
Nubraižykite:
$y = -\frac{1}{2}x + 3$,
$y = -\frac{1}{2}x - 1$.

e)



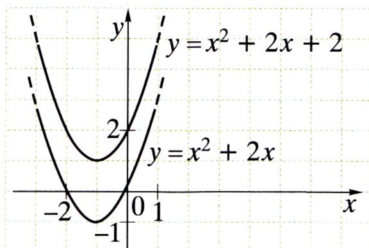
Nubraižykite:
$y = x^2 + 3$,
$y = x^2 - 2$.

f)



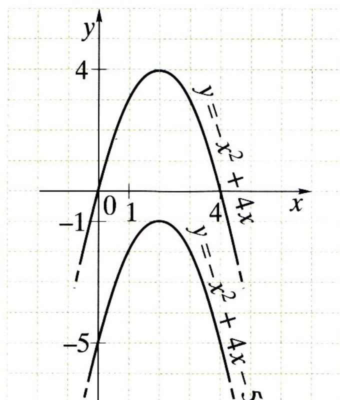
Nubraižykite:
$y = -2x^2 + 1$,
$y = -2x^2 - 3$.

g)



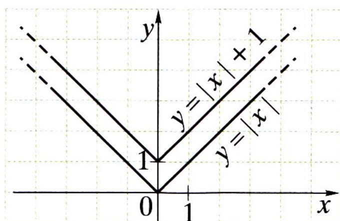
Nubraižykite:
$y = x^2 + 2x - 1$,
$y = x^2 + 2x + 1$.

h)



Nubraižykite:
$y = -x^2 + 4x - 4$,
$y = -x^2 + 4x + 2$.

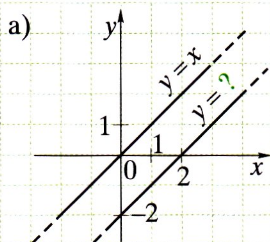
i)

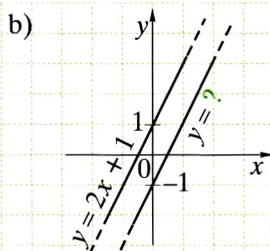


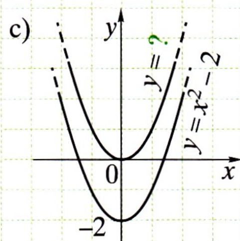
Nubraižykite:
$y = |x| + 3$,
$y = |x| - 3$.

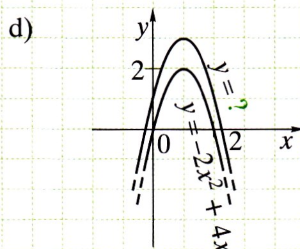
2) Pabaikite sakinį:
Norint nubraižyti funkcijos $y = f(x)+a$ *grafiką, užtenka funkcijos* $y = f(x)$ *grafiką pastumti* ...

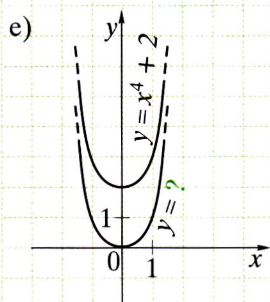
180. Pavaizduoti dviejų funkcijų grafikai, kurie skiriasi tik padėtimi koordinačių plokštumoje (forma ta pati). Vienos iš pavaizduotų funkcijų formulė yra žinoma. Parašykite kitos funkcijos formulę.

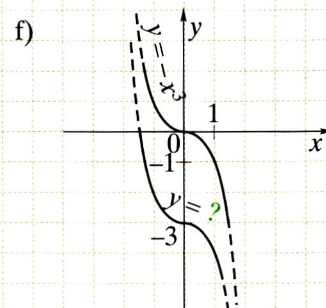
a) 

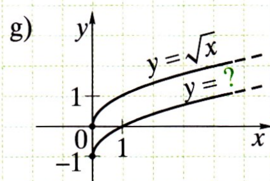
b) 

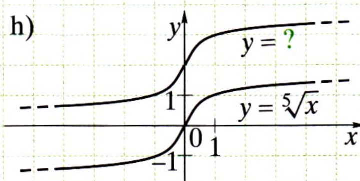
c) 

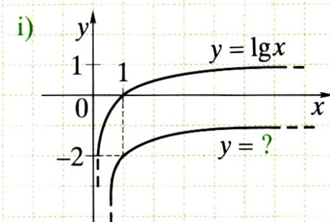
d) 

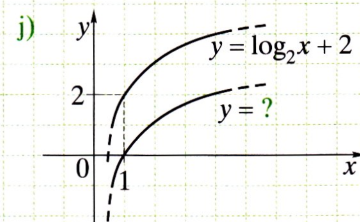
e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

j) 

181. Nustatykite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

a) $f(x)=x$; b) $f(x)=x+1$; c) $f(x)=5$;

d) $f(x)=x^2$; e) $f(x)=x^2+1$; f) $f(x)=-2x^2-2$;

g) $f(x)=-x^2+2x$; h) $f(x)=-x^2+2x-3$; i) $f(x)=x^2+2x$;

j) $f(x)=x^2+x-6$; k) $f(x)=x^2+x-9$; l) $f(x)=x^2+x+6$;

m) $f(x)=\frac{1}{x}$; n) $f(x)=\frac{1}{2x}$; o) $f(x)=\frac{1}{x+2}$;

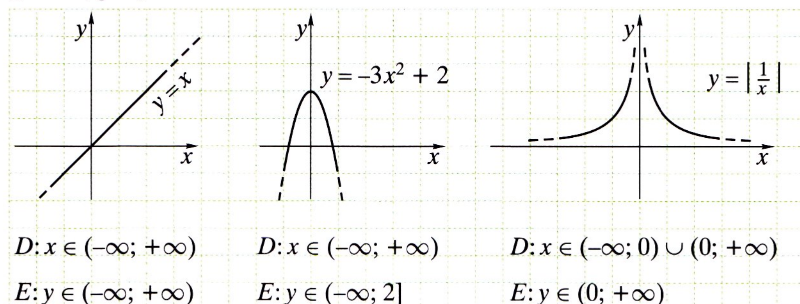
p) $f(x)=\frac{2}{2x-3}$; r) $f(x)=-\frac{4}{x^2}$; s) $f(x)=-\frac{4}{x^2+4}$;

t) $f(x)=\sqrt{x-1}$; u) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2}{x}}$; v) $f(x)=|\sqrt[3]{x}|$.



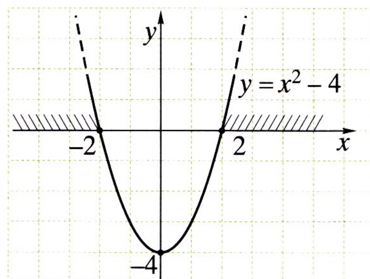
1) Funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sritis — tai tos reikšmės, kurias įgyja nepriklausomasis kintamasis (x), reikšmių sritis — tos reikšmės, kurias įgyja priklausomasis kintamasis ($y=f(x)$).

2) Dažnai apibrėžimo (D) ir reikšmių (E) sritis lengva nustatyti remiantis grafiku, pavyzdžiui:



3) Nustatant funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sritį, pirmiausia galima rasti tas x reikšmes, su kuriomis reiškinys $f(x)$ neturi prasmės. Pavyzdžiui, funkcijos $f(x)=\frac{1}{x+1}$ apibrėžimo sritis yra visos x reikšmės, išskyrus tas, su kuriomis trupmena $\frac{1}{x+1}$ neturi prasmės. *Trupmena neturi prasmės, kai vardiklis lygus* 0. Mūsų atveju trupmenos $\frac{1}{x+1}$ vardiklis $x+1$ lygus 0, kai $x=-1$. Vadinasi, $D_f=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Be to, atminkite, kad *lyginio laipsnio šaknis iš neigiamo skaičiaus neturi prasmės*. Todėl, pavyzdžiui, funkcijos $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ apibrėžimo sritis yra tos x reikšmės, su kuriomis $x^2-4\geqslant 0$, t. y. D: $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

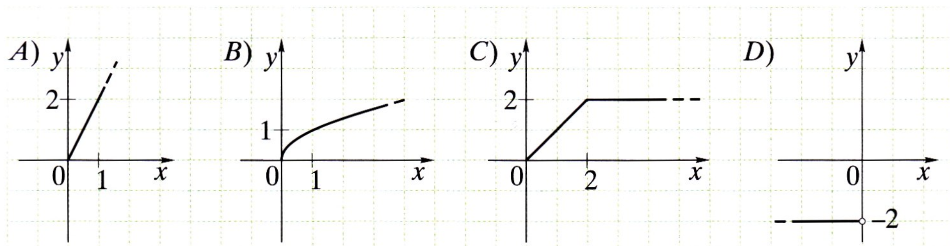


4) Nustatant funkcijos $y=f(x)$ reikšmių sritį, reikia atminti, kad:

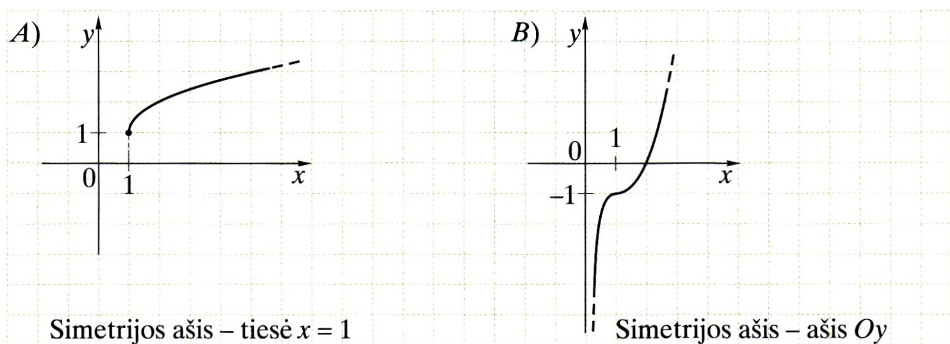
- lyginio laipsnio šaknis yra neneigiamasis skaičius, t. y. $\sqrt[2n]{f(x)}\geqslant 0$.
- modulis yra neneigiamasis skaičius, t. y. $|f(x)|\geqslant 0$.

182. Nubraižyti funkcijos grafiką yra lengviau, kai ta funkcija yra arba lyginė, arba nelyginė, arba jos grafikas yra simetriškas kokios nors tiesės ar taško atžvilgiu.

a) Pabaikite braižyti grafiką funkcijos, jei funkcija yra:
1) lyginė; 2) nelyginė.

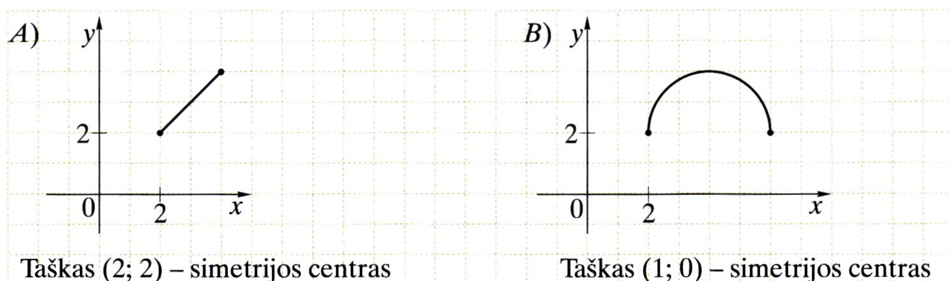


b) Pabaikite braižyti funkcijos grafiką, jei žinoma, kad jis turi simetrijos ašį.



Kaip manote, ar gali *funkcijos* grafikas turėti simetrijos ašį, kuri būtų lygiagreti ašiai Ox?

c) Pabaikite braižyti funkcijos grafiką, jei žinoma, kad jis turi simetrijos centrą.





Funkcija $y = f(x)$ vadinama *lygine*, jei su visais x iš apibrėžimo srities $f(x) = f(-x)$. Lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas Oy ašies atžvilgiu (tiesė $x = 0$ yra jo simetrijos ašis).

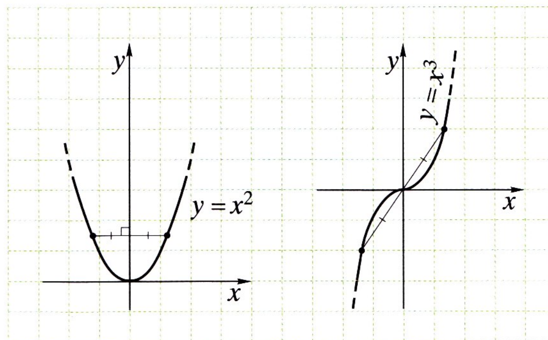
Funkcija $y = f(x)$ vadinama *nelygine*, jei su visais x iš apibrėžimo srities $f(-x) = -f(x)$. Nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu. (Taškas (0; 0) yra jo simetrijos centras.)

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^2$ yra lyginė, nes

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$,

o funkcija $g(x) = x^3$ yra nelyginė, nes

$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$:



183. Nustatykite, kurios kreivės nėra funkcijų grafikai.



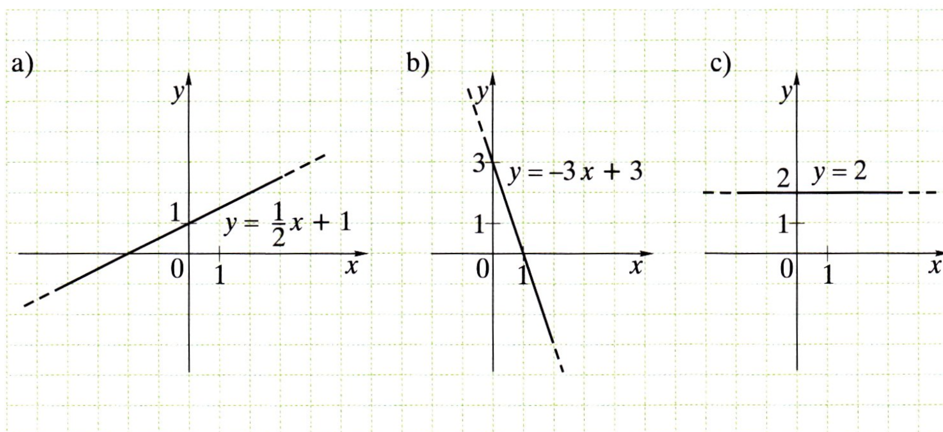
Ne visos kreivės yra funkcijų grafikai.

Jei yra tokių x reikšmių, kurias atitinka ***ne vienintelis*** *kreivės taškas, tai ta kreivė nėra funkcijos grafikas.*

3.2. Funkcijos reikšmių kitimas

Didėjančiosios, mažėjančiosios ir pastoviosios funkcijos

Funkcijos grafikas suteikia daug informacijos apie funkciją ir jos savybes. Pavyzdžiui, panagrinėkime funkcijas, kurių grafikai pavaizduoti brėžinyje:



Ką galima pasakyti apie tas funkcijas? Pirmiausia matome, kad visų trijų funkcijų grafikai yra tiesės. Įsivaizduokime, kad tomis tiesėmis iš kairės į dešinę juda taškas. Atveju a) taškas kyla į viršų, atveju b) — leidžiasi žemyn, atveju c) — nei kyla, nei leidžiasi. Kitaip sakant, x reikšmėms didėjant, y reikšmės:

atveju a) — didėja; atveju b) — mažėja; atveju c) — nekinta.

Sakoma, kad funkcija

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ yra *didėjančioji*,

funkcija

$g(x) = -3x + 3$ yra *mažėjančioji*,

o funkcija

$h(x) = 2$ yra *pastovioji*.

1 užduotis.

1) Kokios funkcijų

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad y = h(x)$$

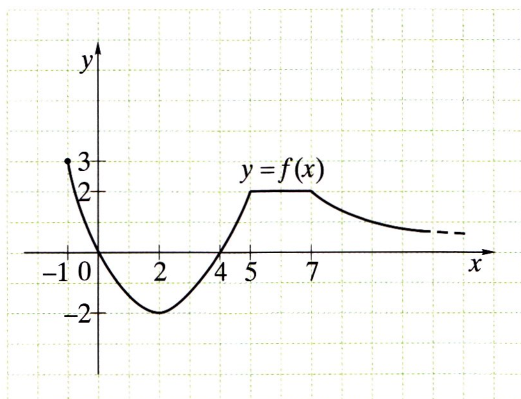
apibrėžimo ir reikšmių sritys?

2) Kuriuose taškuose tų funkcijų grafikai kerta koordinačių ašis?

3) Pasakykite, su kuriomis x reikšmėmis tų funkcijų y reikšmės yra teigiamos, su kuriomis — neigiamos.

Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmė

Panagrinėkime funkciją $y = f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas brėžinyje:



Iš grafiko matome, kad:

1) funkcija apibrėžta intervale $[-1; +\infty)$, t. y.

$$D_f = [-1; +\infty);$$

2) funkcija įgyja reikšmes iš intervalo $[-2; 3]$, t. y.

$$E_f = [-2; 3];$$

3) funkcijos reikšmės mažėja, kai

$$x \in (-1; 2) \text{ ir kai } x \in (7; +\infty);$$

4) funkcijos reikšmės didėja, kai

$$x \in (2; 5);$$

5) funkcijos reikšmės nekinta, kai

$$x \in (5; 7);$$

6) funkcija įgyja teigiamas reikšmes, t. y. $f(x) > 0$, kai

$$x \in [-1; 0) \text{ ir kai } x \in (4; +\infty);$$

7) funkcija įgyja neigiamas reikšmes, t. y. $f(x) < 0$, kai

$$x \in (0; 4);$$

8) funkcija didžiausią reikšmę įgyja, kai $x = -1$. Ta reikšmė $y = 3$, t. y.

$$\max f(x) = 3, \text{ kai } x = -1.$$

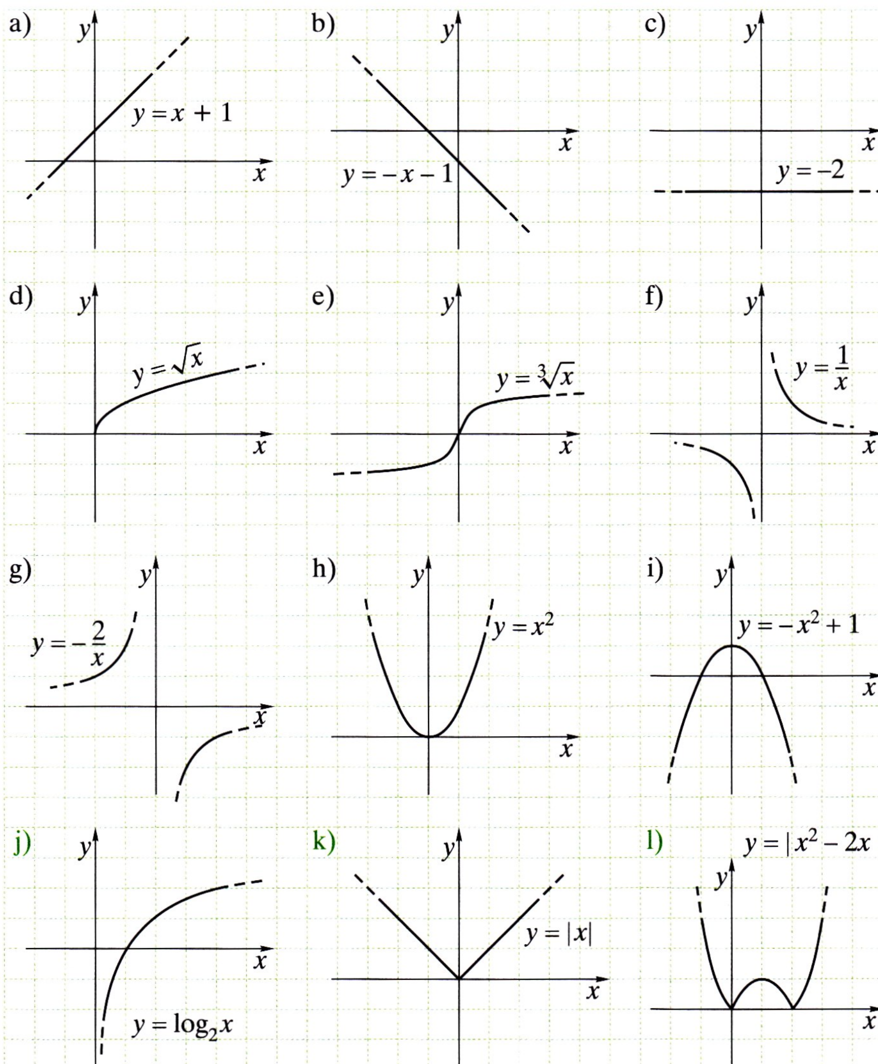
2 užduotis. Kokiame taške funkcija įgyja mažiausią reikšmę ir kam lygi ta reikšmė, t. y. pasakykite, kas turėtų būti parašyta vietoj žvaigždučių:

$$\min f(x) = *, \text{ kai } x = *?$$

Pratimai ir uždaviniai

Didėjančiosios, mažėjančiosios ir pastoviosios funkcijos

184. 1) Iš funkcijos grafiko nustatykite, ar funkcija yra didėjančioji, ar mažėjančioji, ar pastovioji, ar nėra nei didėjančioji, nei mažėjančioji, nei pastovioji.

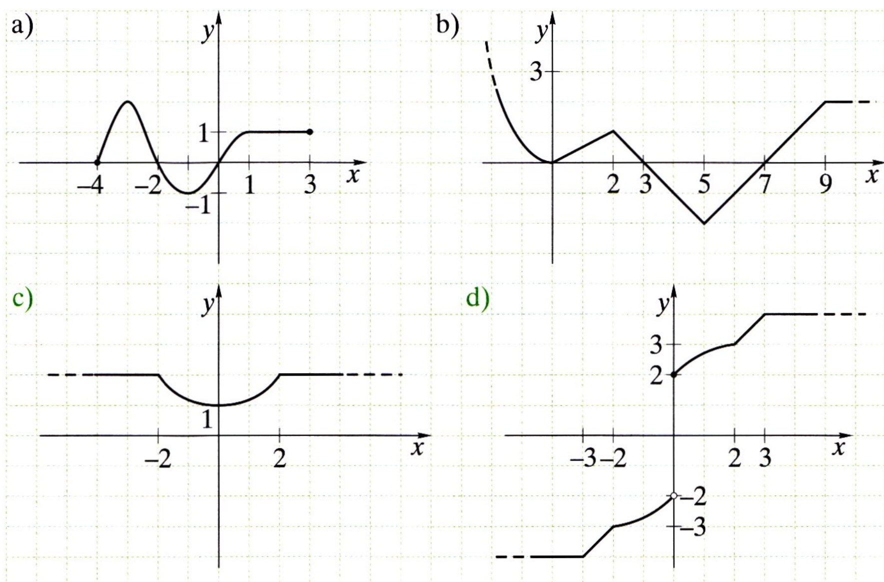


2) Pasakykite kiekvienos šių funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis.
3) Nustatykite koordinates taškų, kuriuose funkcijų grafikai kerta koordinačių ašis.
4) Nustatykite intervalus, kuriuose funkcijos įgyja teigiamas reikšmes, ir intervalus, kuriuose funkcijos įgyja neigiamas reikšmes.

185. Pateikite didėjančiųjų, mažėjančiųjų, pastoviųjų bei nei didėjančiųjų, nei mažėjančiųjų, nei pastoviųjų funkcijų pavyzdžių ir nubraižykite tų funkcijų grafikus.

Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmė

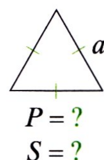
186. 1) Remdamiesi šio skyrelio teorinėje dalyje pateiktu algoritmu apibūdinkite funkciją $y = f(x)$, jei jos grafikas yra:

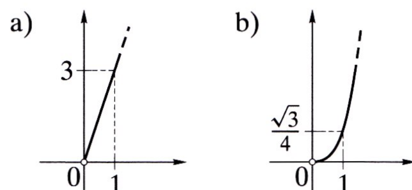


2) Nurodykite funkcijos $y = f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes bei taškus, kuriuose tos reikšmės įgyjamos.

3) Ar kiekvienu atveju funkcija turi didžiausią ir mažiausią reikšmes? Nubraižykite grafiką funkcijos, kuri neturėtų nei didžiausios, nei mažiausios reikšmės.

187. Pavaizduoti dviejų funkcijų grafikai. Vienos funkcijos grafikas vaizduoja, kaip, keičiantis lygiakraščio trikampio kraštinės ilgiui (a), keičiasi to trikampio perimetras (P), o kitos funkcijos grafikas vaizduoja, kaip keičiasi jo plotas (S).





1) Kuris grafikas kurią funkciją atitinka?

2) Kokios raidės turėtų būti parašytos ties koordinačių ašių rodyklėmis?

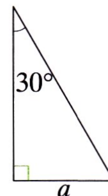
3) Parašykite pavaizduotų funkcijų formules.

4) Apskaičiuokite $P(1)$, $P(2)$, $S(1)$, $S(2)$.

5) Apskaičiuokite a reikšmę, jei:

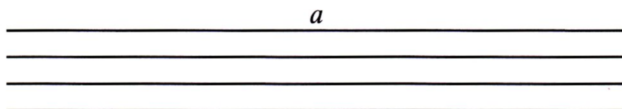
$P(a) = 5$; $P(a) = \sqrt{3}$; $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $S(a) = \sqrt{12}$.

188. Turime statųjį trikampį, kurio vienas kampas lygus 30°, o statinis prieš tą kampą lygus a.

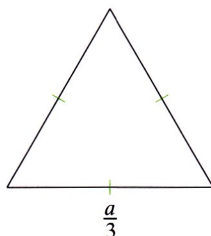


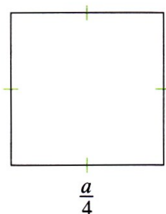
1) Kam lygūs to trikampio:
   a) įžambinė?
   b) kitas statinis?
   c) perimetras P?
   d) plotas S?
2) Nubraižykite funkcijų $P(a)$ ir $S(a)$ grafikus.

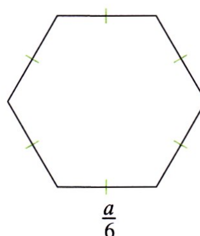
189. Turime keturis vienodo ilgio a vielos gabalus.

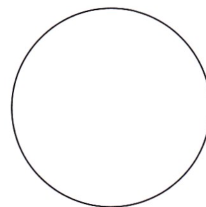


Iš vieno jų išlankstome lygiakraštį trikampį, iš kito — kvadratą, iš trečio — taisyklingąjį šešiakampį, iš ketvirto — apskritimą.









1) Kaip manote, kurios figūros ribojamas plotas S yra didžiausias?
2) Vienoje koordinačių plokštumoje pavaizduokite (apytiksliai) kiekvienos figūros ribojamą plotą $S(a)$ grafiku.

3.3. Funkcijų grafikų taikymai lygtims ir nelygybėms spręsti

Grafinis lygčių sprendimas

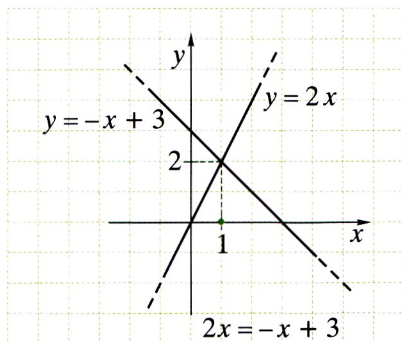
Išspręskime lygtį $2x = -x + 3$. Spręsdami gauname:

$$2x = -x + 3, \quad 3x = 3, \quad x = 1.$$

Iš tikrųjų, $x = 1$ yra lygties $2x = -x + 3$ sprendinys, nes

$$\text{kai } x = 1, \quad \text{tai } 2 \cdot 1 = -1 + 3, \quad 2 = 2.$$

O dabar vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime lygties $2x = -x+3$ kairiosios ir dešiniosios pusių grafikus, t. y. grafikus funkcijų $f(x) = 2x$ ir $g(x) = -x + 3$.

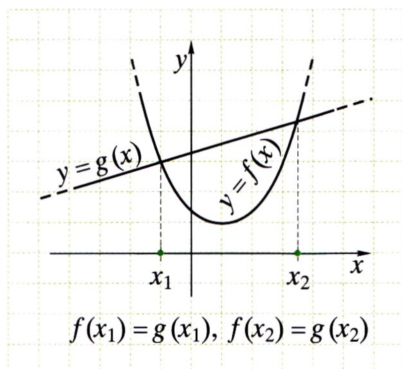


Matome, kad tie grafikai susikerta taške, kurio koordinatės yra (1; 2).
Iš tikrųjų:
$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$,
$g(1) = -1 + 3 = 2$.

Taigi kai $x = 1$, tai $f(x) = g(x)$, t. y. $2x = -x + 3$.

Funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikų bendrų taškų abscisės (x reikšmės) yra lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai.

Taigi lygties $f(x) = g(x)$ sprendinius galima rasti grafiškai:
1) vienoje koordinačių plokštumoje nubraižome funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus;
2) randame tų grafikų bendrų taškų abscises (x reikšmes) — beje, jas dažniausiai galima nustatyti tik apytiksliai. Tos reikšmės ir yra lygties sprendiniai.



Lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai yra x_1 ir x_2.

Grafinis nelygybių sprendimas

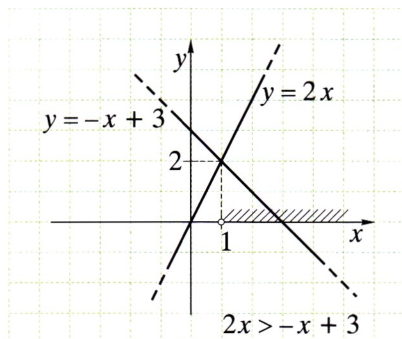
Išspręskime nelygybę $2x > -x + 3$:

$$2x > -x + 3, \quad 3x > 3, \quad x > 1.$$

Iš tikrųjų,

$$\text{kai } x \in (1; +\infty), \quad \text{tai } 2x > -x + 3.$$

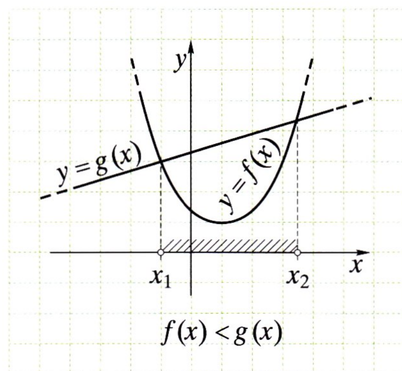
O dabar panagrinėkime brėžinį, kur pateikti nelygybės $2x > -x + 3$ kairiosios ir dešiniosios pusių grafikai, t. y. funkcijų $f(x) = 2x$ ir $g(x) = -x + 3$ grafikai.



Matome, kad kai $x \in (1; +\infty)$, tai tiesė $y = 2x$ yra *virš* tiesės $y = -x + 3$. O tai reiškia, kad su kiekviena x reikšme iš intervalo $(1; +\infty)$ $2x > -x + 3$, pavyzdžiui,
$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$,
$g(2) = -2 + 3 = 1$,
$f(2) > g(2)$.

Tos x reikšmės, su kuriomis funkcijos $y = f(x)$ grafikas yra aukščiau funkcijos $y = g(x)$ grafiko, yra nelygybės $f(x) > g(x)$ sprendiniai.

Taip pat ir nelygybės $f(x) < g(x)$ sprendinius galima rasti grafiškai:
1) vienoje koordinačių plokštumoje nubraižome funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus;
2) randame grafikų susikirtimo taškų abscises (x reikšmes);
3) randame tas x reikšmes, su kuriomis $f(x)$ grafikas yra žemiau $g(x)$ grafiko.



Nelygybės $f(x) < g(x)$ sprendiniai yra

$$x \in (x_1; x_2).$$

Nelygybės $f(x) \geqslant g(x)$ sprendiniai yra

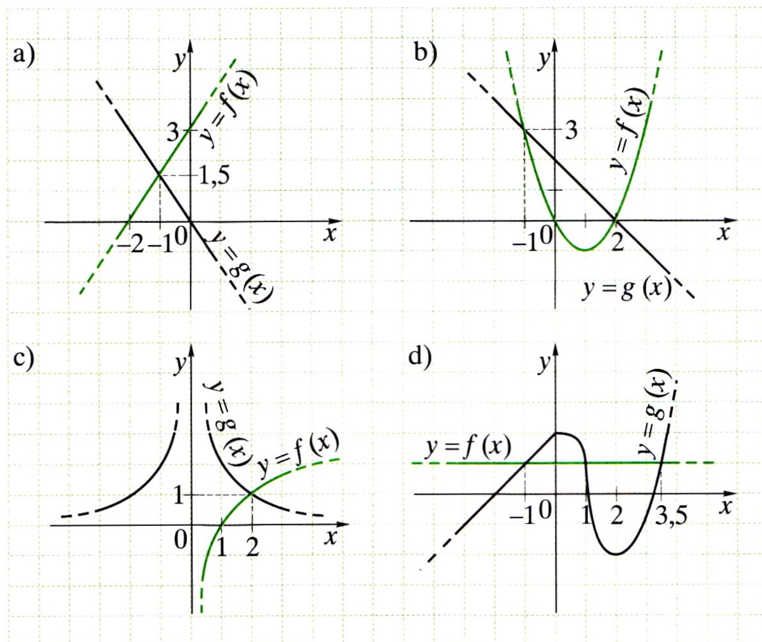
$$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty).$$

Nusakykite, kaip grafiškai galima rasti nelygybių $f(x) > g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$ sprendinius.

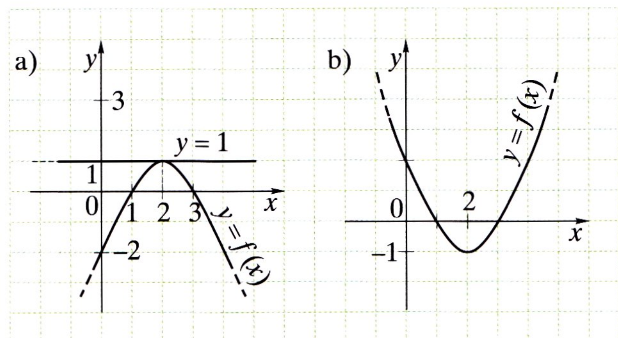
Pratimai ir uždaviniai

190. Remdamiesi funkcijų $y = f(x)$, $y = g(x)$ grafikais, pasakykite sprendinius:

1) lygties $f(x) = g(x)$;
2) nelygybės $f(x) < g(x)$;
3) nelygybės $f(x) \geqslant g(x)$;
4) lygties $f(x) = 0$;
5) lygties $g(x) = 0$;
6) nelygybės $f(x) > 0$;
7) nelygybės $g(x) \leqslant 0$.



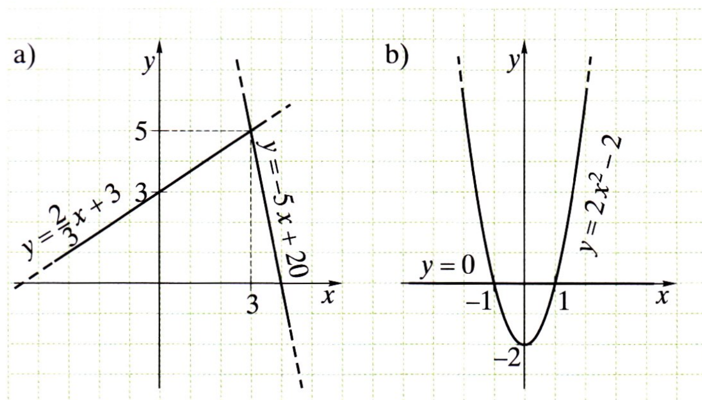
191.



Remdamiesi brėžiniu, pasakykite sprendinius:

1) lygties: $f(x) = 1$; $f(x) = 0$; $f(2) = -2$; $f(x) = 3$.
2) nelygybės: $f(x) < 0$; $f(x) \geqslant -2$; $f(x) < 3$; $f(x) > 3$; $f(x) \geqslant 1$.

192. Lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai pavaizduoti grafiškai, t. y. nubraižius funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus:



1) Pasakykite, kokia tai lygtis ir kokie jos sprendiniai.
2) Remdamiesi kuriuo nors iš pavaizduotų grafikų, raskite sprendinius nelygybės:
   a) $\frac{2}{3}x + 3 < -5x + 20$; b) $2x^2 - 2 \geqslant 0$; c) $2x^2 - 2 < 0$,
   o tada apskaičiuokite juos algebriškai.

193. Pavaizduokite grafikus tokių funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$, kad:
a) lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai būtų $x_1 = 2$, $x_2 = 5$;
b) lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai būtų $x_1 = 5$, $x_2 = 0$;
c) lygtis $f(x) = g(x)$ neturėtų sprendinių;
d) nelygybės $f(x) > g(x)$ sprendiniai būtų intervalo $(0; +\infty)$ skaičiai;
e) nelygybės $f(x) \leqslant g(x)$ sprendiniai būtų intervalų $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$ skaičiai;
f) nelygybė $f(x) \geqslant g(x)$ neturėtų sprendinių.

194. Grafiškai išspręskite lygtį.

a) $x^2 = 1$; b) $x^2 - 1 = 0$; c) $x^2 + x = 2$;
d) $x^2 + x - 2 = 0$; e) $x^2 = -x + 2$; f) $x^3 = 1$;
g) $x^3 - 1 = 0$; h) $\frac{1}{x} = x$; i) $x^4 = 2x$;
j) $\sqrt{x} = x^2$; k) $\sqrt[3]{x} = x - 1$; l) $x^5 = -\frac{2}{x}$.

195. Grafiškai išspręskite nelygybę.
a) $x^2 > 0$; b) $x^2 > 1$; c) $x^2 \leqslant 1$; d) $x^3 \leqslant 0$; e) $x^3 < 1$; f) $x^3 \geqslant -2$;
g) $\frac{1}{x} > 0$; h) $\frac{1}{x} \leqslant 0$; i) $\frac{1}{x} \geqslant -1$; j) $\sqrt{x} > x^2$; k) $\sqrt[3]{x} \geqslant x - 1$;
l) $x^5 \leqslant -\frac{2}{x}$; m) $x^2 + 2x \leqslant 0$; n) $2x^2 - 3x > 0$; o) $x^2 - 25 > 0$;
p) $x^2 + 25 \leqslant 0$; r) $x^2 - x - 6 > 0$; s) $2x^2 + 7x - 4 \leqslant 0$;
t) $x^2 - 2x + 3 > 0$; u) $2x^2 + x + 10 \leqslant 0$.

3.4. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos grafinis sprendimas

Imkime lygtį, turinčią ne vieną, bet du nežinomuosius, pavyzdžiui:

$$x + y = 6.$$

Lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri paverčia tą lygtį teisinga skaitine lygybe.

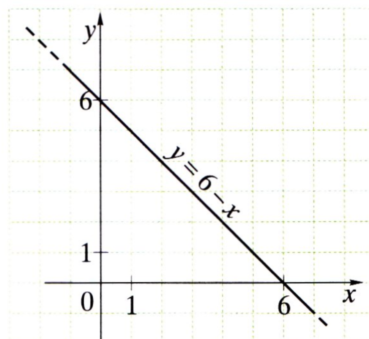
Aišku, kad lygtis $x + y = 6$ turi be galo daug sprendinių. Pavyzdžiui, skaičių pora $x = 1$ ir $y = 5$ yra jos sprendinys, nes $1 + 5 = 6$.

Pasakykite daugiau lygties $x + y = 6$ sprendinių.

Visi šios lygties sprendiniai yra tiesės

$$y = 6 - x$$

taškų koordinatės.



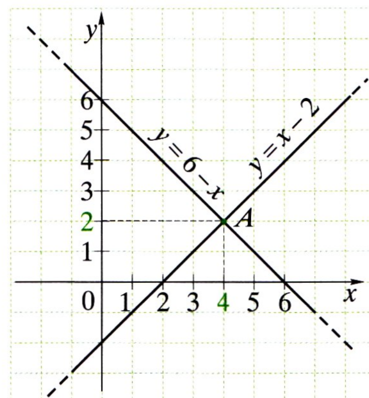
Kai ieškome dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais *bendrųjų* sprendinių, tai sakome, kad sprendžiame dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Pavyzdžiui, imkime sistemą:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Pavaizduokime sistemos kiekvienos lygties sprendinius toje pačioje koordinačių plokštumoje, t. y. nubraižykime abiejų lygčių grafikus

$$y = 6 - x \quad \text{ir} \quad y = x - 2.$$

Matome, kad grafikai turi vieną bendrą tašką A, kurio koordinatės yra abiejų sistemos lygčių bendrasis sprendinys, t. y. lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2 \end{cases}$ sprendinys $x = 4$, $y = 2$.



Pratimai ir uždaviniai

196. 1) Lygties su dviem nežinomaisiais

$$3x - y = 4$$

sprendinius pavaizduokite grafiškai. Nurodykite keletą tos lygties sprendinių.

2) Toje pačioje koordinačių plokštumoje pavaizduokite lygties

$$-x + 4 = y$$

sprendinius. Nurodykite keletą tos lygties sprendinių.

3) Iš grafiko nustatykite bendrąjį abiejų lygčių sprendinį.

4) Pasakykite sprendinį lygčių sistemos:

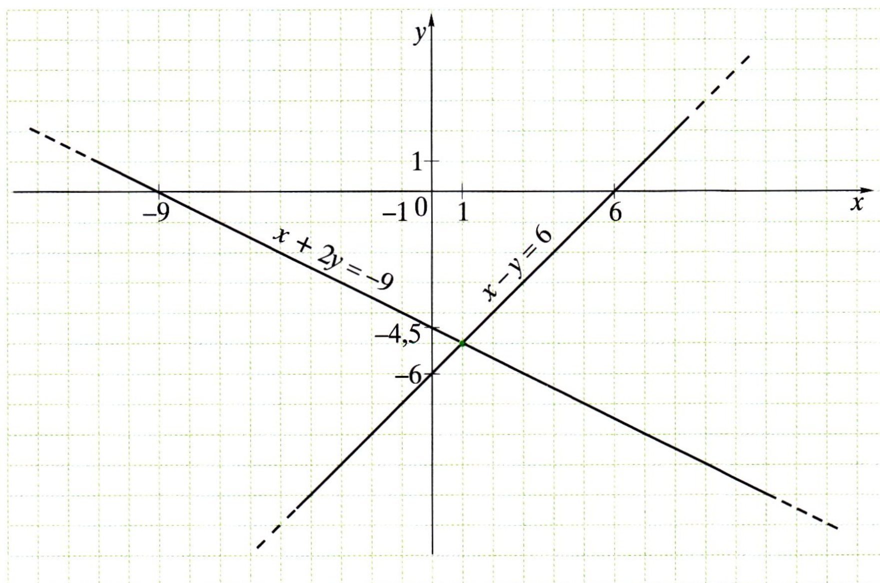
$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ -x + 4 = y. \end{cases}$$

197. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y - x = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - 2y = -4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2y = -4, \\ y = x^2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

198. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema buvo sprendžiama grafiškai:



1) Pasakykite tos sistemos sprendinį.

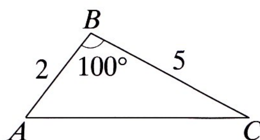
2) Užrašykite tą sistemą.

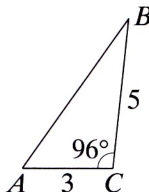
199. Sugalvokite sistemą, kurios sprendinys būtų skaičių pora:

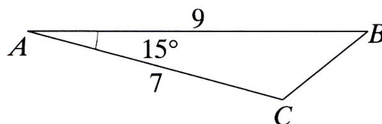
a) (0; 0); b) (0; 4); c) (−3; 2).

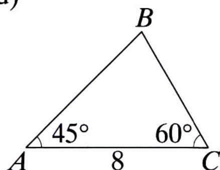
3.5. Geometrijos uždaviniai

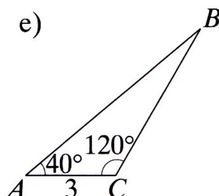
200. Remdamiesi sinusų ir kosinusų teoremomis, apskaičiuokite nežinomas trikampio kraštines ir kampus.

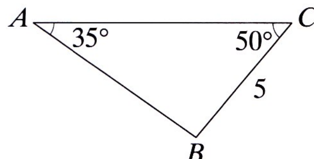
a)


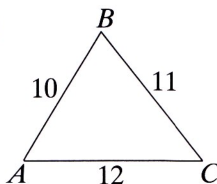
b)


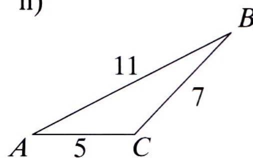
c)


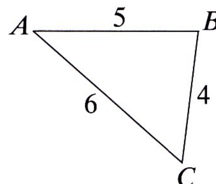
d)


e)


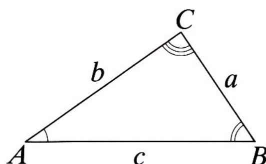
f)


g)


h)


i)


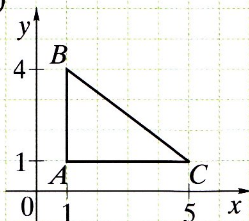


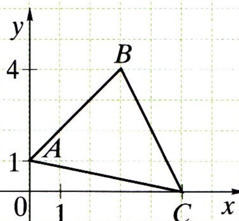


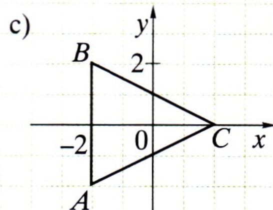
Sinusų teorema:
$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$.

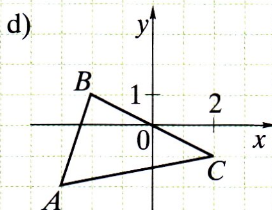
Kosinusų teorema:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$,
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$.

201. Koordinačių plokštumoje pavaizduotas trikampis.

a)


b)




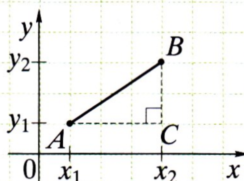


Apskaičiuokite to trikampio:

1) kraštinių ilgius; 2) kampų dydžius.



Atstumą tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų A ir B, kai žinomos tų taškų koordinatės $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$, galima apskaičiuoti remiantisformule:



$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Iš tikrųjų:

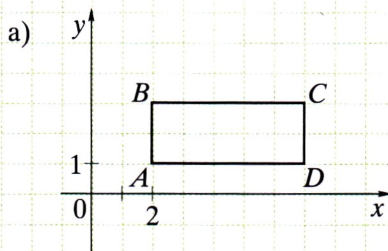
$\triangle ABC$ — status,

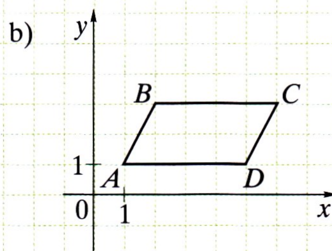
$AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$.

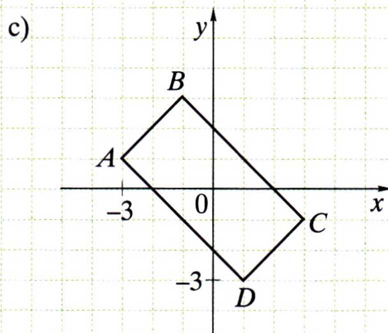
Pagal Pitagoro teoremą:

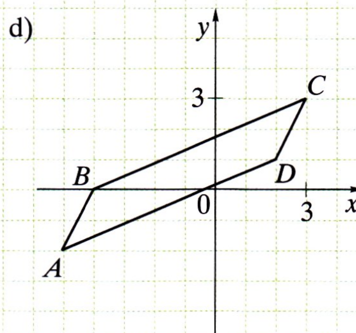
$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

202. Apskaičiuokite lygiagretainio $ABCD$ perimetrą ir plotą.



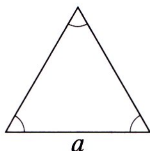






3.6. Pasitikrinkime

203. a) Užrašykite, kam lygus pavaizduoto trikampio perimetras P ir plotas S. Pabaikite pildyti lentelę:

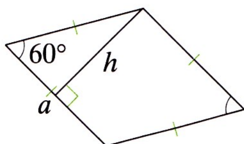


$P(a) = ?$
$S(a) = ?$

$a =$	1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$		
$P =$				6	
$S =$					$2\sqrt{3}$

Kokia pavaizduoto trikampio rūšis?

b) Užrašykite, kam lygus pavaizduoto keturkampio perimetras P, plotas S ir aukštinė h. Pabaikite pildyti lentelę:



$P(a) = ?$
$S(a) = ?$
$h(a) = ?$

$a =$	2			
$h =$		$3\sqrt{3}$		
$P =$			4	
$S =$				$4\sqrt{3}$

Kokia pavaizduoto keturkampio rūšis?

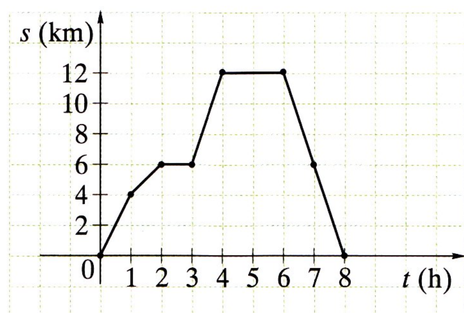


Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės.

c) Nubraižykite lygiakraščio trikampio perimetro P priklausomybės nuo jo kraštinės ilgio a grafiką.

d) Nubraižykite lygiakraščio trikampio ploto S priklausomybės nuo jo kraštinės ilgio a grafiką.

204. Grafiku pavaizduota, kaip toli nuo stovyklavietės buvo turistai kiekvieną 8 valandų trukmės žygio valandą.



1) Remdamiesi grafiku, užpildykite lentelę:

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s =$									

2) Apibūdinkite turistų žygį:
- Kada turistai tolo nuo stovyklavietės?

- Kokiu vidutiniu greičiu turistai ėjo 1-ą žygio valandą, 2-ą žygio valandą, 4-ą žygio valandą, 7-ą žygio valandą, 8-ą žygio valandą?
- Koks buvo vidutinis *ėjimo* greitis?
- Koks buvo vidutinis *kelionės* greitis?

205. Remdamiesi lentele, nustatykite, ar dydžiai $x > 0$ ir $y > 0$ yra tiesiogiai proporcingi, ar yra atvirkščiai proporcingi, ar nėra proporcingi.

a)

$x =$	1	2	4	5
$y =$	2	3	5	6

b)

$x =$	1	2	5	10
$y =$	10	5	2	1

c)

$x =$	1	2	3	4
$y =$	3	6	9	12

d)

$x =$	10	12	14	16
$y =$	10	12	14	16

206. Nubraižykite funkcijos grafiką.

a) $y = x$; b) $y = -2x + 1$; c) $y = x^2$;

d) $y = x^2 - 4$; e) $y = \frac{1}{x}$; f) $y = -\frac{2}{x}$;

g) $y = \sqrt{x}$; h) $y = \sqrt[3]{x}$; i) $y = -\sqrt[3]{x}$.

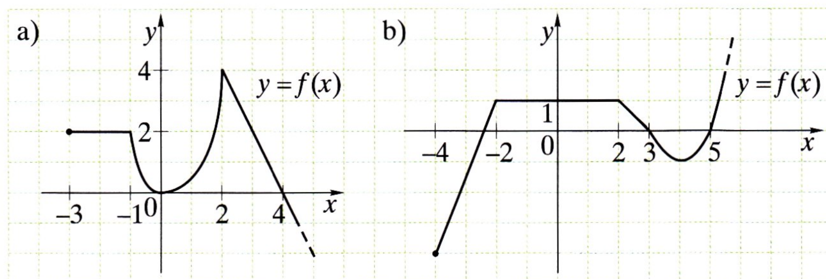
Nustatykite:

1) funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis;
2) funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus;
3) x reikšmes, su kuriomis funkcija įgyja teigiamas reikšmes; įgyja neigiamas reikšmes; lygi 0;
4) ar funkcija yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.

207. Grafiškai išspręskite lygtį.
a) $x^2 = 4$; b) $\sqrt{x} = 1$; c) $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x$; d) $x^2 + 4x - 5 = 0$.

208. Grafiškai išspręskite nelygybę.
a) $x^2 \geqslant 1$; b) $x^3 < -8$; c) $x^2 \leqslant \sqrt{x}$; d) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$.

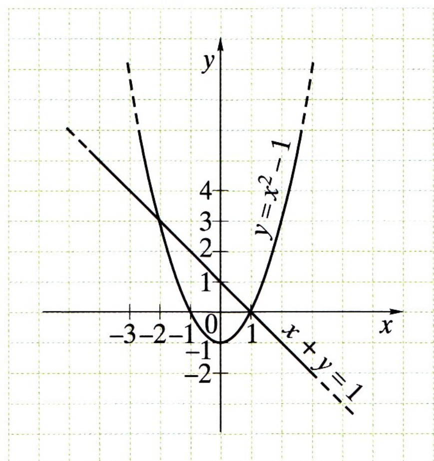
209. Pasakykite funkcijos $y = f(x)$:
1) apibrėžimo ir reikšmių sritis;
2) reikšmių didėjimo, mažėjimo ir pastovumo intervalus;
3) intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės yra teigiamos; yra neigiamos;
4) didžiausią reikšmę; mažiausią reikšmę.



210. Išspręskite lygčių sistemą grafiškai.

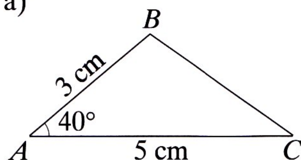
a) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = -1, \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$

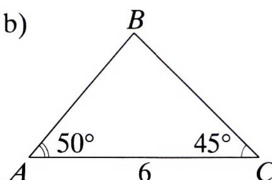
211. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema buvo sprendžiama grafiškai:

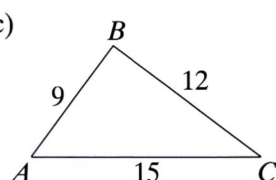


1) Pasakykite tos sistemos sprendinius.
2) Užrašykite tą sistemą.

212. Apskaičiuokite nežinomas trikampio kraštines ir nežinomus kampus.

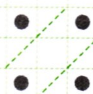
a) 

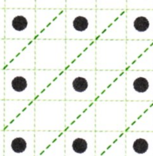
b) 

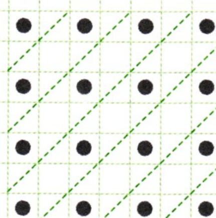
c) 

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2$$

$1 + 2 + 1 = 2^2$ $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$ $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$ . . .

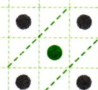
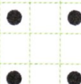




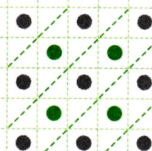
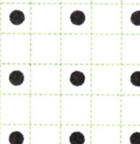


$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) + (2n-1) + \cdots + 3 + 1 = n^2 + (n+1)^2$$

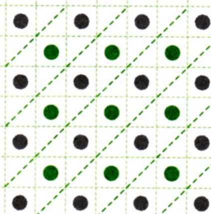
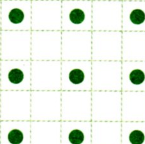
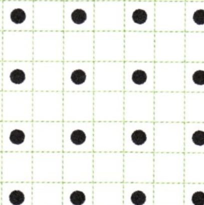
$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$

 =  + 

$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$

 =  + 

$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$

 =  + 

. . .

4 LYGTYS, LYGČIŲ SISTEMOS

4.1. Ekvivalenčios lygtys

Kõkios lygtys vadinamos ekvivalenčiomis?

Sprendžiant uždavinius, dažnai tenka sudaryti ir spręsti lygtis. Panagrinėkime, kaip du bendraklasiai (Tomas ir Jonas) sprendė tokį uždavinį:

Brolis ir sesuo ant lapelio užrašė po teigiamą skaičių. Mama, pažiūrėjusi į tuos skaičius, pasakė, kad brolio užrašytas skaičius yra trigubai mažesnis už sesers, o tėtė pažiūrėjęs pasakė, kad sesers užrašytas skaičius yra 2 vienetais didesnis už brolio. Kokį skaičių ant lapelio užrašė brolis ir kokį sesuo?

Tomo sprendimas	Jono sprendimas
Brolio sugalvotą skaičių pažymėkime x. Tada sesers sugalvotas skaičius yra $3x$. Kadangi $3x$ už x didesnis 2 vienetais, tai $3x - 2 = x.$ Išsprendę lygtį, gauname $x = 1.$ Vadinasi, brolis užrašė 1, o sesuo $3 \cdot 1 = 3.$	Brolio sugalvotą skaičių pažymėkime x. Tada sesers sugalvotas skaičius yra $3x$. Kadangi x už $3x$ mažesnis 2 vienetais, tai $x + 2 = 3x.$ Išsprendę lygtį, gauname $x = 1.$ Vadinasi, brolis užrašė 1, o sesuo $1 + 2 = 3.$

Kaip matome, Tomo ir Jono lygtys skiriasi, bet jų sprendinys yra tas pats.

Lygtys, turinčios vienodus sprendinius, vadinamos ekvivalenčiomis.

Pastaba. Ekvivalenčiomis vadinamos ir lygtys, neturinčios sprendinių, pavyzdžiui, ekvivalenčios yra lygtys

$$x^2 = -9 \quad \text{ir} \quad |x| = -1.$$



Sugalvokite daugiau lygčių brolio ir sesers užrašytiems skaičiams nustatyti.

Kõkios lygties pertvarkos vadinamos ekvivalenčiomis?

Pažiūrėkime, kaip savo lygtis sprendė Tomas ir Jonas.

Tomo lygties sprendimas	Jono lygties sprendimas
$3x - 2 = x$ Iš abiejų lygties pusių atimkime x: $3x - 2 = x \;\big\vert -x$ $2x - 2 = 0$ Prie abiejų lygties pusių pridėkime 2: $2x - 2 = 0 \;\big\vert +2$ $2x = 2$ Abi lygties puses padalykime iš 2: $2x = 2 \;\big\vert : 2$ $x = 1$	$x + 2 = 3x$ Sukeiskime lygties puses vietomis (apsukime lygtį): $3x = x + 2$ Iš abiejų pusių atimkime x: $3x = x + 2 \;\big\vert -x$ $2x = 2$ Abi lygties puses padalykime iš 2: $2x = 2 \;\big\vert : 2$ $x = 1$

Spręsdami lygtis, jas pertvarkome taip, kad sprendiniai nesikeistų.

Lygties pertvarkos, nekeičiančios sprendinių, vadinamos ekvivalenčiomis.

Spręsdami lygtis, remiamės šiomis ekvivalenčiomis pertvarkomis:

- prie abiejų lygties pusių pridėję (ar iš abiejų lygties pusių atėmę) tą patį skaičių ar reiškinį, gauname ekvivalenčią lygtį;
- abi lygties puses padauginę (ar padaliję) iš to paties skaičiaus (nelygaus 0), gauname ekvivalenčią lygtį.

Pratimai ir uždaviniai

213. Ar ekvivalenčios yra lygtys:

a) $2(x-5)=3x+4,\quad \frac{x}{2}=2x-26$? b) $x^2=25,\quad 2x-10=0$?

c) $|x|=3,\quad (x-3)(x+3)=0$? d) $10x^2=0,\quad x+5=5$?

214. Išspręskite tiesinę (pirmojo laipsnio) lygtį su vienu nežinomuoju.

a) $2(x-1)-3x=4x+15(3-2x)$; b) $x-(3x-2)=-7x+(4-x)$;

c) $2x-2=x+2(\frac{x}{2}-1)$; d) $2x-2=x+2(\frac{x}{2}-2)$.



1) Išspręsti lygtį — reiškia rasti visas nežinomojo reikšmes, su kuriomis lygtis virsta teisinga lygybe, arba įsitikinti, kad tokių reikšmių nėra.
2) Tiesinė lygtis dažniausiai turi vieną sprendinį. Bet ji gali turėti be galo daug sprendinių arba jų neturėti iš viso. Pavyzdžiui, lygtis $x+2=2+x$ turi be galo daug sprendinių, nes su kiekviena x reikšme lygtis virsta teisinga skaitine lygybe. Todėl šios lygties sprendiniai yra visi skaičiai, t. y. $x \in \boldsymbol{R}$. O, pavyzdžiui, lygtis $x=x+2$ sprendinių neturi, nes kad ir kokią x reikšmę imtume, gausime neteisingą lygybę. Todėl ši lygtis sprendinių neturi.

215. Išspręskite nepilnąją kvadratinę (antrojo laipsnio) lygtį.

a) $x^2+3x=0$; b) $-3x^2+5x=0$; c) $x^2-4=0$;

d) $x^2+4=0$; e) $3x^2-9=0$; f) $5x^2-1=3(x^2-\frac{1}{3})$;

g) $10x^2=0$; h) $-10x^2=10x$; i) $4x^2=16$.



1) Lygtis $ax^2+bx+c=0$, kur a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), vadinama kvadratine. Jei bent vienas iš skaičių b ir c lygus 0, tai tokia kvadratinė lygtis vadinama nepilnąja kvadratine lygtimi.
2) Nepilnąją kvadratinę lygtį patartina spręsti skaidant tiesiniais (pirmojo laipsnio) dauginamaisiais. Pavyzdžiui, išspręskime lygtį $4x^2-x=0$.
Kairėje lygties pusėje iškelkime prieš skliaustus x:
$x\cdot(4x-1)=0$.
Gavome lygtį, kurios kairėje pusėje yra du dauginamieji x ir $4x-1$, o dešinė pusė lygi 0. Kadangi sandauga lygi 0, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus 0, tai šios lygties sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis

$x=0$ arba $4x-1=0$,
$4x=1$,
$x=\frac{1}{4}$.

Taigi lygties $4x^2 - x = 0$ sprendiniai yra $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$. Iš tikrųjų, kai:
$x = 0$, tai $4 \cdot 0^2 - 0 = 0$;
$x = \frac{1}{4}$, tai $4 \cdot (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

Skaidydami dauginamaisiais, išspręskime lygtį:

$2x^2 - 18 = 0$.

Pirmiausia galima abi lygties puses padalyti iš 2:

$x^2 - 9 = 0$.

Prisiminę kvadratų skirtumo formulę $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ir kairiąją lygties pusę parašę kaip kvadratų skirtumą

$x^2 - 3^2 = 0$,

kairiąją pusę galime išskaidyti dauginamaisiais:

$(x - 3)(x + 3) = 0$.

Sandauga lygi 0, todėl bent vienas iš dauginamųjų lygus 0, ir lygties sprendinius rasime iš lygybių

$x - 3 = 0$ arba $x + 3 = 0$,
$x = 3$, $x = -3$.

Taigi lygtis $2x^2 - 18 = 0$ turi du sprendinius $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.
Iš tikrųjų,

kai $x = -3$, tai $2 \cdot (-3)^2 - 18 = 2 \cdot 9 - 18 = 0$;
kai $x = 3$, tai $2 \cdot 3^2 - 18 = 2 \cdot 9 - 18 = 0$.

---

216. a) Mokinys nepilnąją kvadratinę lygtį $-5x^2 = 5x$ sprendė taip.
Pirmiausia abi lygties puses padalijo iš -5:

$-5x^2 = 5x \mid : (-5)$,

$x^2 = -x$.

Po to abi lygties puses padalijo iš x:

$x^2 = -x \mid : x$,

$x = -1$.

Patikrino, ar tikrai $x = -1$ yra lygties $-5x^2 = 5x$ sprendinys:

kai $x = -1$, tai $-5x^2 = -5 \cdot (-1)^2 = -5 \cdot 1 = -5$, $5x = 5 \cdot (-1) = -5$.

Parašė atsakymą $x = -1$.
Bet vėliau jis pastebėjo, kad ir skaičius $x = 0$ yra tos lygties sprendinys, nes

kai $x = 0$, tai $-5 \cdot 0^2 = -5 \cdot 0 = 0$ ir $5 \cdot 0 = 0$.

Vadinasi, spręsdamas lygtį, jis prarado vieną sprendinį. Paaiškinkite, kur mokinys suklydo. Išspręskite šią lygtį.

b) Mokinys nepilnąją kvadratinę lygtį $5x^2 = 45$ sprendė taip.
Pirmiausia abi lygties puses padalijo iš 5:

$5x^2 = 45 \mid : 5,$

$x^2 = 9.$

Po to iš abiejų pusių ištraukė kvadratinę šaknį:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9},$

$x = 3.$

Patikrino, ar $x = 3$ yra lygties sprendinys:

$5 \cdot 3^2 = 45.$

Ir parašė atsakymą: $x = 3$.
Ar teisus moksleivis? Paaiškinkite, kodėl.

217. Išspręskite pilnąją kvadratinę lygtį.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$; b) $x^2 - 4x + 4 = 0$; c) $-x^2 + 10x - 25 = 0$;

d) $3x^2 + 3x + 3 = 0$; e) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; f) $-2x^2 + 2x + 12 = 0$;

g) $x^2 + 2x - 3 = 0$; h) $x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} = 0$; i) $x^2 + x + 1 = 0$.



1) Pilnąją kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$), kaip ir nepilnąją, galima spręsti kairiąją jos pusę skaidant dauginamaisiais. Pavyzdžiui, išspręskime lygtį
$x^2 + 12x + 36 = 0.$
Remsimės sumos kvadrato formule $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = 0,$
$(x + 6)^2 = 0.$
Reiškinys $(x + 6)^2 = (x + 6)(x + 6)$ yra lygus 0, kai
$x + 6 = 0.$
Iš čia
$x = -6.$
Nevisada kvadratinės lygties koeficientai būna „patogūs“. Pavyzdžiui, taikydami skirtumo kvadrato formulę $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, išspręskime lygtį
$x^2 - 8x + \underline{15} = 0,$
$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \underline{+ 4^2 - 1} = 0,$
$(x - 4)^2 - 1 = 0.$
Dabar kairiąją pusę galima išskaidyti dauginamaisiais, remiantis kvadratų skirtumo formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:
$(x - 4)^2 - 1^2 = 0,$
$(x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = 0,$
$(x - 5)(x - 3) = 0.$

Sandauga $(x-5)(x-3)$ lygi 0, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus nuliui, t. y.:
$x-5=0$ arba $x-3=0$,
$x=5$, $x=3$.
Taigi lygties $x^2-8x+15=0$ sprendiniai yra $x_1=3$, $x_2=5$.
2) Kaip matome iš 1) punkto, pilnąją kvadratinę lygtį nepatogu spręsti skaidant dauginamaisiais. Patogiau įsiminti jos sprendinių formules. Lygties
$ax^2+bx+c=0$
sprendiniai yra
$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; čia $D=b^2-4ac$.
Kvadratinė lygtis:
- turi du sprendinius, kai $D>0$,
- turi vieną sprendinį, kai $D=0$,
- neturi sprendinių, kai $D<0$.

Pavyzdžiui,
$x^2-8x+15=0$,
$D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15=64-60=4$,
$x_1=\frac{-(-8)-\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{8-2}{2}=3$, $x_2=\frac{-(-8)+\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{8+2}{2}=5$.

---

218. Skaidydami dauginamaisiais, išspręskite trečiojo laipsnio lygtį.
a) $x^3-9x=0$; b) $x^3+2x^2=0$; c) $x^3-4x^2+4x=0$.

219. Išspręskite lygtį, kurios nežinomasis yra ir vardiklyje (racionaliąją lygtį).

a) $\frac{2+x}{x}=0$; b) $\frac{5}{x}-x=0$; c) $\frac{2}{x}=1$;
d) $\frac{2+x}{x}=-3$; e) $\frac{x}{x+3}-\frac{5}{x}=0$; f) $\frac{5x}{2}-\frac{4}{x}=0$;
g) $\frac{x^2-25}{x-5}=0$; h) $\frac{x^2+x-6}{x+3}=0$.



1) Lygtis, kurios nežinomasis yra kurio nors tą lygtį sudarančio reiškinio vardiklyje, vadinama racionaliąja.
2) Racionaliąją lygtį galima spręsti suteikiant jai pavidalą

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Kadangi trupmena lygi 0, kai skaitiklis lygus 0, o vardiklis nelygus 0, tai randame tas x reikšmes, su kuriomis $f(x)=0$, bet $g(x)\neq 0$.
Pavyzdžiui, išspręskime lygtį

$$\frac{5x}{x-1}+5=0.$$

Suteikime lygčiai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)}=0$:

$$\frac{5x}{x-1}+\frac{5}{1}=0, \quad \frac{5x+5(x-1)}{x-1}=0,$$
$$\frac{5x+5x-5}{x-1}=0, \quad \frac{10x-5}{x-1}=0.$$

Trupmena $\frac{a}{b}$ lygi 0, kai skaitiklis $a = 0$, o vardiklis $b \neq 0$. Todėl randame tas x reikšmes, su kuriomis $10x - 5 = 0$, $10x = 5$, $x = \frac{1}{2}$.
Patikriname, ar su ta x reikšme vardiklis $x - 1$ nelygus 0.
Iš tikrųjų, kai $x = \frac{1}{2}$, tai $x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$.
Taigi $x = \frac{1}{2}$ yra lygties $\frac{5x}{x-1} + 5 = 0$ sprendinys.
3) Racionaliąją lygtį galima spręsti naikinant vardiklius, t. y. lygtį pakeičiant sveikąja lygtimi.
Pavyzdžiui, 2) punkto lygtį galima spręsti taip. Abi jos puses padauginkime iš vardiklio $(x - 1)$:

$$\frac{5x}{x-1} + 5 = 0 \,\Big|\cdot (x-1).$$

$$\frac{5x}{x-1} \cdot (x-1) + 5 \cdot (x-1) = 0,$$

$$5x + 5x - 5 = 0,$$

$$10x = 5, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Gavome lygties sprendinį $x = \frac{1}{2}$.
Patikriname:

kai $x = \frac{1}{2}$, tai $\dfrac{5 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} + 5 = \dfrac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} + 5 = -5 + 5 = 0.$

Atsakymas. $x = \frac{1}{2}$.

---

220. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{5}{x-1} + \frac{30}{x+1} = 5$;   b) $\frac{7}{x+2} + \frac{3}{x-2} = 2$;

c) $\frac{6}{x-2} + \frac{5}{x} = 3$;   d) $\frac{5}{x+5} - \frac{6}{x^2-25} = 1$.

221. Ar ekvivalenčios lygtys:

a) $\frac{100}{x} = x$, $100 = x^2$?   b) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$, $x - 3 = 0$?

222. Sudarykite lygtį, kurios sprendiniai būtų:

a) $x = 5$;   b) $x = -7$;   c) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

d) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$;   e) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$;

f) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$.

223. a) Su kuriomis kintamojo x reikšmėmis trupmenų

$$\frac{1}{x} \quad \text{ir} \quad \frac{x}{x-4}$$

suma lygi jų sandaugai?

b) Su kuriomis kintamojo y reikšmėmis trupmenų

$$\frac{1}{y} \quad \text{ir} \quad \frac{y}{y-1}$$

skirtumas lygus jų sandaugai?

Judėjimo uždaviniai, sprendžiami sudarant racionaliąsias lygtis

224. a) Motorinė valtis per 2 valandas nuplaukė 25 kilometrus pasroviui ir 3 kilometrus prieš srovę. Upės tėkmės greitis 3 kilometrai per valandą. Raskite valties savąjį greitį.

b) Motorinė valtis per 3 valandas nuplaukė 26 kilometrus pasroviui ir 9 kilometrus prieš srovę. Koks valties greitis stovinčiame vandenyje ir kiek laiko valtis plaukė prieš srovę, jei upės tėkmės greitis 2 km/h?

c) Kateris nuplaukė upe 12 km prieš srovę ir 5 km pasroviui. Katerio sugaištas laikas lygus laikui, kurio būtų reikėję nuplaukti ežeru 18 km. Koks katerio savasis greitis, jei upės tėkmės greitis 3 km/h?

d) Kateris nuplaukė upe 5 km prieš srovę ir 14 km pasroviui. Katerio sugaištas laikas lygus laikui, kurio būtų reikėję nuplaukti ežeru 18 km. Koks katerio savasis greitis, jei upės tėkmės greitis 3 km/h?

e) Motorinė valtis upe nuplaukė 60 km pasroviui ir grįžo atgal. Plaukdama prieš srovę, valtis sugaišo 50 minučių daugiau negu pasroviui. Raskite upės tėkmės greitį, jei valties greitis stovinčiame vandenyje lygus 21 km/h.



Motorinė valtis per 5 valandas nuplaukė upe pasroviui 24 kilometrus ir grįžo prieš srovę atgal. Upės tėkmės greitis 2 kilometrai per valandą. Raskime valties greitį stovinčiame vandenyje (savąjį greitį) ir kiek valandų valtis plaukė pasroviui.

Valties greitį stovinčiame vandenyje pažymėkime x km/h. Tada jos greitis plaukiant pasroviui bus $(x+2)$ km/h, o plaukiant prieš srovę $(x-2)$ km/h. Prisiminkime kelio formulę

$$s = v \cdot t$$

(kelias s lygus greičio v ir laiko t sandaugai).

Pasroviui valtis nuplaukė $s_1 = 24$ km ir plaukė $v_1 = (x+2)$ km/h greičiu. Vadinasi, pasroviui valtis plaukė

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{24}{x+2}$$

valandų.

Prieš srovę valtis nuplaukė $s_2 = 24$ km ir plaukė $v_2 = (x-2)$ km/h greičiu. Vadinasi, prieš srovę valtis plaukė

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{24}{x-2}$$

valandų.

Iš viso valtis plaukė 5 valandas, todėl

$$\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5.$$

Sprendžiame gautą racionaliąją lygtį:

$$\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5 \Big| \cdot (x+2)(x-2),$$

$$24(x-2) + 24(x+2) = 5(x+2)(x-2),$$

$$24x - 48 + 24x + 48 = 5(x^2 - 4),$$

$$48x = 5x^2 - 20,$$

$$5x^2 - 48x - 20 = 0; \quad D = 2704, x_1 = -0{,}4, x_2 = 10.$$

Neigiama x reikšmė netinka, nes valties greitis negali būti neigiamas. Vadinasi, valties greitis stovinčiame vandenyje lygus 10 km/h.

Pasroviui valtis plaukė

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{24}{x+2} = \frac{24}{10+2} = \frac{24}{12} = 2 \quad \text{(valandas)}.$$

Valties savasis greitis 10 km/h, pasroviui valtis plaukė 2 valandas.

---

225. a) Greitasis traukinys 150 km nuvažiuoja 45 min. greičiau negu paprastas traukinys. Koks kiekvieno traukinio greitis, jei greitasis traukinys per valandą nuvažiuoja 10 km didesnį atstumą negu paprastas traukinys?

b) Kelią tarp miesto ir stovyklavietės Jurga važiuoja 2 valandomis ilgiau negu Andrius. Jurga išvažiavo iš stovyklavietės į miestą, o Andrius — iš miesto į stovyklavietę tuo pačiu metu. Jie susitiko po 2 h 55 min. Po kiek laiko nuo susitikimo Jurga pasieks miestą? Andrius pasieks stovyklavietę?

Darbo uždaviniai, sprendžiami sudarant racionaliąsias lygtis

226. Dvi darbininkės, dirbdamos kartu, derlių nuėmė per 4 dienas. Pirmoji darbininkė, dirbdama viena, užtruktų 5 dienomis ilgiau negu antroji darbininkė. Per kiek dienų derlių nuimtų kiekviena darbininkė, dirbdama atskirai?



Jei darbininkas per vieną valandą padaro $d = 5$ detales, tai per $t = 3$ valandas jis padarys

$A = d \cdot t = 5 \cdot 3 = 15$ detalių.

Formulė (ji kartais vadinama darbo formule)

$A = d \cdot t$

yra analogiška kelio formulei

$s = v \cdot t.$

Išnagrinėkime tokį darbo uždavinį:

Du darbininkai, dirbdami kartu, tam tikrą darbą atliko per 6 valandas. Pirmasis darbininkas, dirbdamas vienas, tą darbą atliktų 5 valandomis greičiau negu antrasis darbininkas, dirbdamas vienas. Per kiek valandų pirmasis darbininkas vienas atliktų visą darbą?

Laiką, per kurį pirmasis darbininkas atliktų visą darbą, pažymėkime x valandų. Tada antrasis darbininkas visą darbą atliktų per $(x+5)$ valandas.

Pirmasis darbininkas per 1 valandą atlieka $\frac{1}{x}$ darbo dalį, o antrasis — $\frac{1}{x+5}$ darbo dalį. Per 6 valandas pirmasis darbininkas atliko $\frac{6}{x}$ darbo dalį, o antrasis — $\frac{6}{x+5}$ darbo dalį. Kartu per 6 valandas jie atliko visą darbą, todėl $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$.
Pastebėkime, kad 1 šioje lygybėje reiškia visą atliktą darbą. Visą darbą galėjome žymėti ir kokia nors raide. Pavyzdžiui, visą darbą pažymėję A, turėtume, kad pirmasis darbininkas per 1 valandą atlieka darbą $\frac{A}{x}$, o per 6 valandas — darbą $\frac{6A}{x}$.
Analogiškai antrasis darbininkas per 1 valandą atliktų darbą $\frac{A}{x+5}$, o per 6 valandas — $\frac{6A}{x+5}$. Tada turėtume tokią lygtį
$\frac{6A}{x} + \frac{6A}{x+5} = A$.
Padalíję abi puses iš A ($A \neq 0$), gautume jau turėtą lygtį:
$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$.
Sprendžiame gautą racionaliąją lygtį:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1 \Big| \cdot x(x+5),$$

$$6(x+5) + 6x = x(x+5),$$

$$12x + 30 = x^2 + 5x,$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0; \quad x_1 = 10, x_2 = -3.$$

Pagal x prasmę tinka tik reikšmė $x = 10$.
Atsakymas. Per 10 valandų.

---

227. a) Iš pradžių sieną mūrijo vienas darbininkas. Po 4 valandų prie jo prisijungė antras darbininkas. Kartu padirbėję 8 valandas, jie baigė mūryti sieną. Per kiek laiko sieną sumūrytų antrasis darbininkas, dirbdamas vienas, jei tą sieną jis sumūrytų 8 valandomis greičiau negu pirmasis darbininkas?

b) Iš pradžių du darbininkai dirbo kartu. Kartu jie dirbo 2 valandas, po to vienas darbininkas išvažiavo į kitą objektą, o darbą baigė antras darbininkas. Jis tą darbą užbaigė per 80 minučių. Per kiek valandų visą darbą atliktų kiekvienas darbininkas, jei antrasis šį darbą dirbtų 1 valanda ir 10 minučių ilgiau negu pirmasis?

228. Du sunkvežimiai turėjo pervežti krovinius. 5 h jie dirbo drauge, tada vienas iš jų išvyko kitur, o po 50 minučių antrasis užbaigė darbą. Per kiek laiko šiuos krovinius galėtų pervežti kiekvienas sunkvežimis atskirai, jeigu antrasis juos pervežtų 2 h greičiau negu pirmasis?

229. a) Reikia pagaminti 150 detalių. Naujosiomis staklėmis visas darbas atliekamas 45 minutėmis greičiau negu senosiomis. Kiek detalių per valandą pagaminama kiekvienomis staklėmis, jei naujosiomis staklėmis per valandą pagaminama 10 detalių daugiau negu senosiomis?

b) Vandens bakas dviem vamzdžiais pripildomas per 2 h 55 min. Pirmuoju vamzdžiu tas bakas pripildomas 2 h greičiau negu antruoju. Per kiek laiko bakas pripildomas kiekvienu vamzdžiu atskirai?

4.2. Bikvadratinė lygtis

Kokia lygtis vadinama bikvadratine?

Šiame skyrelyje mokysimės spręsti lygtis

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Tokios lygtys vadinamos *bikvadratinėmis*.
Bikvadratinių lygčių pavyzdžiai:

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0,$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0,$$

$$x^4 - x^2 - 6 = 0.$$

Bikvadratinės lygtys primena kvadratines

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lygtis, tik vietoj x^2 yra x^4, o vietoj x yra x^2.

Kaip spręsti bikvadratinę lygtį?

Bikvadratinę lygtį galima spręsti ją pertvarkant į kvadratinę lygtį.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Pastebėkime, kad

$$x^4 = (x^2)^2,$$

t. y.:

$$\left(x^2\right)^2 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Reiškinį x^2 pažymėkime y, t. y.:

$$x^2 = y.$$

Vietoj x^2 lygtyje parašę y, gausime kvadratinę lygtį:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Išspręskime gautąją kvadratinę lygtį:

$$D = 169 - 144 = 25,$$

$$y_1 = \frac{13 - \sqrt{25}}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4,$$

$$y_2 = \frac{13 + \sqrt{25}}{2} = \frac{13 + 5}{2} = 9.$$

O dabar iš lygybės

$$x^2 = y$$

raskime kiekvieną gautą y reikšmę atitinkančias x reikšmes:

kai $y = 4$, tai $x^2 = 4$, $\quad x_1 = -2, x_2 = 2$;

kai $y = 9$, tai $x^2 = 9$, $\quad x_3 = -3, x_4 = 3$.

Gavome, kad lygtis $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ turi keturis sprendinius:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 3.$$

Iš tikrųjų:

kai $x = -2$, tai $(-2)^4 - 13 \cdot (-2)^2 + 36 = 0$,

kai $x = 2$, tai $2^4 - 13 \cdot 2^2 + 36 = 0$,

kai $x = -3$, tai $(-3)^4 - 13 \cdot (-3)^2 + 36 = 0$,

kai $x = 3$, tai $3^4 - 13 \cdot 3^2 + 36 = 0$.

Atsakymas. -3; -2; 2; 3.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Pažymime

$$x^2 = y.$$

Tada

$$x^4 = y^2,$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

$$D = 0,$$

$$y = 1.$$

Randame x:

$$x^2 = 1,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Atsakymas. -1; 1.

? Išspręskite lygtį $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Sprendimo būdas, kai reiškinį su vienu nežinomuoju keičiame kitu nežinomuoju, vadinamas *nežinomojo keitimu*.

Pratimai ir uždaviniai

230. Išspręskite lygtį.

a) $x^4 = 1$; b) $x^4 = -1$; c) $x^4 = -1$;

d) $5x^4 = 20$; e) $-6x^4 = -54$; f) $-x^4 = 16$;

g) $2x^4 = 4$; h) $4x^4 = -8$; i) $10x^4 = 0$;

j) $\frac{x^4}{2} = 8$; k) $\frac{3x^4}{5} = -12$; l) $\frac{3x^4+2}{3} = 1$.

Išsprendę lygtis, padarykite išvadą, kaip nuo a ir b ženklų priklauso lygties $ax^4 = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) sprendinių skaičius. Parašykite formules lygties $ax^4 = b$ ($a \neq 0$) sprendiniams užrašyti.

231. Išspręskite lygtį.

a) $x^4 - x^2 = 0$; b) $x^4 + x^2 = 0$; c) $-x^4 + x^2 = 0$;

d) $-x^4 - x^2 = 0$; e) $x^4 - 4x^2 = 0$; f) $x^4 + 4x^2 = 0$;

g) $2x^4 - x^2 = 0$; h) $-2x^4 - x^2 = 0$; i) $5x^4 - 3x^2 = 0$.

Išsprendę lygtis, padarykite išvadą, kaip nuo a ir b ženklų priklauso lygties $ax^4 + bx^2 = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) sprendinių skaičius. Parašykite tos lygties sprendinių formules.



Kairiąją lygties pusę išskaidykite dauginamaisiais.

232. Išspręskite lygtį, įvedę naują nežinomąjį.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; c) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$.

Kiek sprendinių kiekvienu atveju turėjo bikvadratinė lygtis? Ką galite pasakyti apie tuos sprendinius?

233. Išspręskite lygtį.

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; b) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$; c) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$.

Kiek sprendinių kiekvienu atveju turėjo bikvadratinė lygtis? Ką galite pasakyti apie tuos sprendinius?

234. Išspręskite lygtį.

a) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; c) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$.

1) Kvadratinės lygties $ay^2 + by + c = 0$ sprendiniai $y_1 > 0$, $y_2 < 0$. Kiek sprendinių turi tuos pačius koeficientus a, b ir c turinti bikvadratinė lygtis $ax^4 + bx^2 + c = 0$?
2) Ar gali bikvadratinė lygtis $ax^4 + bx^2 + c = 0$ neturėti sprendinių, jei ją atitinkanti kvadratinė lygtis $ay^2 + by + c = 0$ turi du sprendinius, t. y. $D > 0$?
3) Paaiškinkite, kaip bikvadratinės lygties $ax^4 + bx^2 + c = 0$ sprendinių skaičius priklauso nuo ją atitinkančios kvadratinės lygties $ay^2 + by + c = 0$ diskriminanto ženklo ir sprendinių ženklų.

235. Sudarykite bikvadratinę lygtį:
a) neturinčią sprendinių;
b) turinčią du sprendinius;
c) turinčią keturis sprendinius.

Lygčių sprendimas įvedant naują nežinomąjį

236. Įvedant naują nežinomąjį, galima spręsti ne tik bikvadratines lygtis. Pavyzdžiui, išspręskime lygtį:

$$5(x^2-1)+\frac{1}{x^2-1}=6.$$

Į šią lygtį x įeina du kartus, bet kiekvieną kartą jis įeina tik į reiškinį x^2-1, todėl tą reiškinį verta pažymėti kokia nors raide, pvz.:

$$x^2-1=y.$$

Tada lygtis virs tokia:

$$5y+\frac{1}{y}=6.$$

Išsprendžiame šią racionaliąją lygtį:

$$5y+\frac{1}{y}=6 \,\Big|\cdot y,$$

$$5y^2+1=6y,$$

$$5y^2-6y+1=0,$$

$$D=16,\ y_1=1,\ y_2=\frac{1}{5}.$$

Iš lygybės $x^2-1=y$ randame x:

kai $y=1$, tai $x^2-1=1, x^2=2$; $\quad x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$;

kai $y=\frac{1}{5}$, tai $x^2-1=\frac{1}{5}, x^2=\frac{6}{5}$; $\quad x_3=-\sqrt{1{,}2}, x_4=\sqrt{1{,}2}$.

Vadinasi, lygties $5(x^2-1)+\frac{1}{x^2-1}=6$ sprendiniai yra

$-\sqrt{2}, \quad -\sqrt{1{,}2}, \quad \sqrt{1{,}2}, \quad \sqrt{2}.$

Pabandykite šią racionaliąją lygtį išspręsti neįvesdami naujo nežinomojo.

237. Išspręskite lygtį įvedę naują nežinomąjį.
a) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$; b) $4x^2-1-\frac{1}{4x^2-1}=0$.

238. Išspręskite lygtį $\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=2$, pažymėję $\sqrt{x-1}=y$.

239. Išspręskite logaritminę lygtį $(\log_2 x)^2+5\log_2 x+6=0$.

4.3. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos algebrinis sprendimas

Spręsdami lygčių sistemas grafiškai, dažniausiai randame tik apytikslį sprendinį. Tikslių sprendinių ieškome algebriniais sprendimo būdais — keitimo ir sudėties.

PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

keitimo ir sudėties būdais.

Sprendimas.

Keitimo būdas

Iš pirmosios lygties išreikškime kurį nors nežinomąjį, pvz., x:

$$x + y = 6,$$
$$x = 6 - y.$$

Gautąją išraišką įstatykime į antrąją lygtį vietoj x:

$$(6 - y) - y = 2,$$
$$6 - y - y = 2,$$
$$6 - 2y = 2,$$
$$-2y = -4,$$
$$y = 2.$$

Šią y reikšmę įstatome į lygtį $x = 6 - y$:

$$x = 6 - 2,$$
$$x = 4.$$

Atsakymas. $x = 4$, $y = 2$.

Sudėties būdas

Panariui sudėję abi lygtis, gausime lygtį su vienu nežinomuoju:

$$+\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2 \end{cases}$$
$$2x = 8,$$
$$x = 4.$$

Gautą x reikšmę įstatome į bet kurią sistemos lygtį, pavyzdžiui, į pirmąją:

$$x + y = 6,$$
$$4 + y = 6,$$
$$y = 2.$$

Pastaba. Šios sistemos sprendinį galima užrašyti ir taip: $(4; 2)$. Ar skaičiuodami nesuklydome, visada pravartu pasitikrinti:

$\begin{cases} 4 + 2 = 6, \\ 4 - 2 = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ abi sistemos lygtys virto teisingomis lygybėmis, vadinasi, $(4; 2)$ yra sistemos sprendinys.

Pratimai ir uždaviniai

240. Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} 5x - y = 3, \\ 2x + 3y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3y - 1, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 5, \\ 3x + 2y = 6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ 10x - y = 2. \end{cases}$

241. Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ y^2 + 5x^2 = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = 3, \\ x^2 - xy = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x = y - 8, \\ x^2 - y^2 = 3y. \end{cases}$

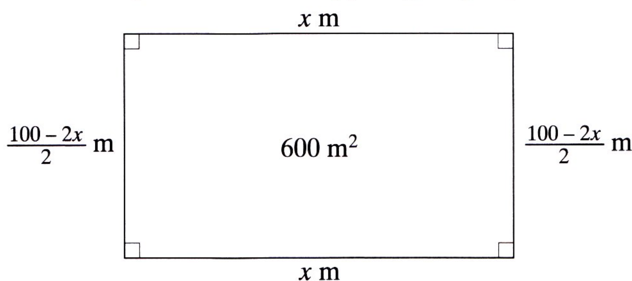


Lygčių sistemą, kurios viena lygtis yra tiesinė, o kita netiesinė, patartina spręsti keitimo būdu:
1) tiesinės lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu;
2) gautąją išraišką įrašome į kitą sistemos lygtį;
3) išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju;
4) apskaičiuojame atitinkamas kito nežinomojo reikšmes.

242. Dviejų skaičių suma lygi 15, o iš dvigubo pirmojo skaičiaus atėmę antrąjį, gauname 6. Raskite tuos skaičius.

243. Dviejų skaičių skirtumas lygus 1, o jų sandauga lygi 110. Raskite tuos skaičius.

244. Stačiakampio formos sklypas aptvertas 100 m ilgio tvora. To sklypo plotas yra 600 m^2. Apskaičiuokite sklypo ilgį ir plotį.



245. Stačiakampio formos aikštelės krašto ilgis buvo 26 m. Kai vieną aikštelės matmenų pailgino 1 m, o kitą sutrumpino 2 m, tai aikštelės plotas sumažėjo 4 m^2. Kokie pradinės aikštelės matmenys?

4.4. Geometrijos uždaviniai

246. 1) Turime 12 metrų ilgio vielą. Kokio ploto sklypą šia viela apjuosime, jei sklypo forma bus:

a) taisyklingasis trikampis?

b) kvadratas?

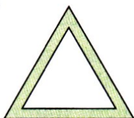
c) taisyklingasis šešiakampis?

d) skritulys?

Atsakymus surašykite didėjimo tvarka (metro dešimtųjų tikslumu).

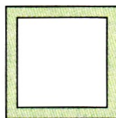
2) Kokie būtų atsakymai, jei tvertume 13 metrų ilgio viela?

3) Koks nuspalvintos figūros plotas?

a) 

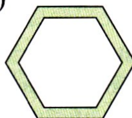
$P_{\triangle} = 12$ m

$P_{\triangle} = 13$ m

b) 

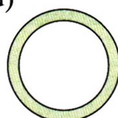
$P_{\square} = 12$ m

$P_{\square} = 13$ m

c) 

$P_{⬡} = 12$ m

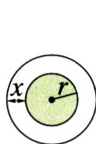
$P_{⬡} = 13$ m

d) 

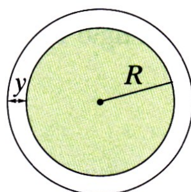
$P_{\bigcirc} = 12$ m

$P_{\bigcirc} = 13$ m

4) Kamuolį, kurio spindulys $r = 30$ cm, apjuosiame kaspinu. Įsivaizduokime, kad labai ilgu kaspinu apjuosta ir Žemė (Žemės spindulys $R \approx 6400$ km). Abu kaspinus pailginkime 1 metru, o kiekvieną kaspiną ištempkime į atitinkamą koncentrišką apskritimą.



$r = 30$ cm
$x = ?$

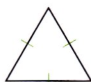


$R = 6400$ km
$y = ?$

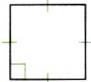
Apskaičiuokite x ir y.



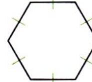
Taisyklingųjų daugiakampių ir skritulio plotai:



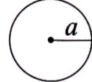
$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



$S = a^2$



$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$



$S = \pi a^2$

4.5. Pasitikrinkime

247. Išspręskite pirmojo laipsnio lygtį.
a) $5(1-x)=3+4(x-2)$; b) $\frac{4x-3}{2}=2(3x+1)-3$.

248. Išspręskite nepilnąją kvadratinę lygtį.

a) $6x^2-3x=0$; b) $-2x^2-5x=0$;

c) $6x^2-24=0$; d) $-x^2-9=0$.

249. Išspręskite pilnąją kvadratinę lygtį.

a) $x^2+4x+3=0$; b) $4x^2-12x+9=0$;

c) $-x^2+2x+1=0$; d) $-3x^2-x-1=0$.

250. Išspręskite trečiojo laipsnio lygtį.
a) $x^3-4x^2=0$; b) $3x^3-27x=0$; c) $x^3+x^2+x=0$.

251. Išspręskite racionaliąją lygtį.
a) $\frac{x^2+x}{x-1}=0$; b) $\frac{x^2+x}{x+1}=0$; c) $\frac{3}{x^2}=1$.

252. Išspręskite ketvirtojo laipsnio lygtį.

a) $x^4=16$; b) $x^4=-16$; c) $x^4=0$;

d) $2x^4-6=0$; e) $x^4-16x^2=0$; f) $-5x^4-10x^2=0$.

253. Išspręskite bikvadratinę lygtį.
a) $x^4+x^2-2=0$; b) $x^4-3x^2+2=0$; c) $x^4+3x^2+2=0$.

254. Motorinė valtis per 3 valandas nuplaukė upe pasroviui 22 kilometrus ir prieš srovę 7 kilometrus. Raskite valties greitį stovinčiame vandenyje, jei upės tėkmės greitis yra 2 km/h.

255. Išspręskite lygčių sistemą.
a) $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=10, \\ 4x+2y=5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x^2+xy=0. \end{cases}$

256. a) Dviejų skaičių suma lygi 7, o jų dvigubas skirtumas lygus 8. Raskite tuos skaičius.
b) Stačiojo trikampio įžambinė lygi 10 cm, o trikampio perimetras — 24 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

257. Apskaičiuokite lygiakraščio trikampio, kvadrato, taisyklingojo šešiakampio ir skritulio plotus, jei kiekvieno jų perimetras lygus 50 cm.

Aritmetinis vidurkis, geometrinis vidurkis

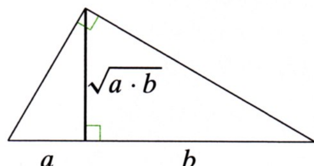
Dviejų skaičių a ir b aritmetinis vidurkis apibrėžiamas taip:

$$\frac{a+b}{2}.$$

Tų skaičių geometrinis vidurkis — taip:

$$\sqrt{a \cdot b}.$$

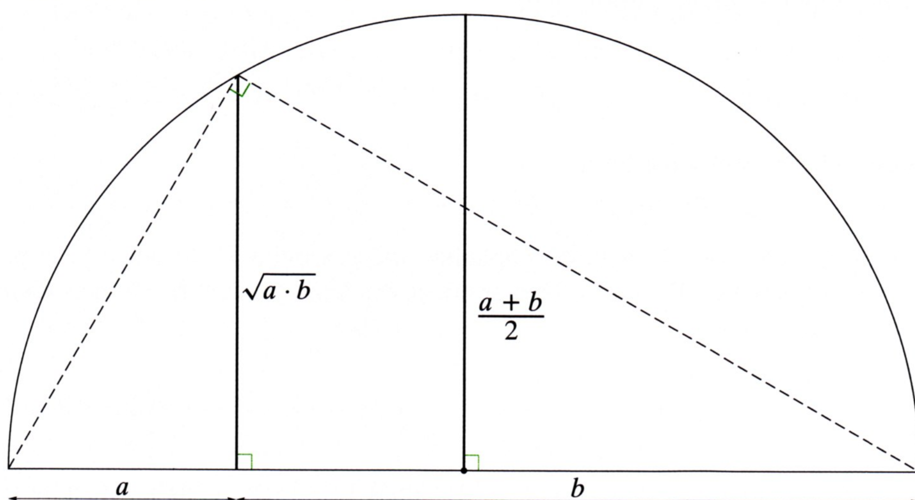
Verta įsiminti, kad stačiojo trikampio aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo, ilgis lygus įžambinės atkarpų ilgių geometriniam vidurkiui:



Geometrinis vidurkis neviršija aritmetinio vidurkio, t. y. su visais (neneigiamais) a ir b yra teisinga nelygybė:

$$\sqrt{a \cdot b} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Šią nelygybę galima pavaizduoti geometriškai:



Teisingos ir tokios nelygybės:

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

$$\sqrt[5]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5},$$

$$\ldots$$

5 NELYGYBĖS

5.1. Tiesinės nelygybės

Kai norime nustatyti, su kuriomis kintamojo reikšmėmis vienas reiškinys įgyja mažesnes (arba didesnes, arba ne mažesnes, arba ne didesnes) reikšmes negu kitas reiškinys, sprendžiame nelygybę.

Pavyzdžiui, imkime du reiškinius su vienu kintamuoju x:

$$3x \quad \text{ir} \quad x+2.$$

Nustatykime, su kuriomis x reikšmėmis reiškinys $3x$ įgyja didesnes reikšmes negu reiškinys $x+2$. Tas reikšmes rasime išsprendę nelygybę

$$3x > x+2.$$

Kurie iš skaičių $x = -5; -1; 0; 1; 2; 4; \sqrt{5}$ yra šios nelygybės sprendiniai?

Išspręsti nelygybę — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad nelygybė jų neturi.

Spręsdami nelygybes, jas pertvarkome į paprastesnes, bet turinčias tuos pačius sprendinius (ekvivalenčias nelygybes).

Spręsdami nelygybes, remsimės tokiomis ekvivalenčiomis pertvarkomis:

1) jei prie abiejų nelygybės pusių pridėsime (iš abiejų pusių atimsime) po tą patį skaičių (ar reiškinį), tai gausime ekvivalenčią nelygybę;
2) jei abi nelygybės puses padauginsime (padalysime) iš to paties teigiamojo skaičiaus, tai gausime ekvivalenčią nelygybę;
3) jei abi nelygybės puses padauginsime (padalysime) iš to paties neigiamojo skaičiaus ir pakeisime nelygybės ženklą priešingu, tai gausime ekvivalenčią nelygybę.

Išspręskime nelygybę $3x > x+2$:

$$3x > x+2 \;\big|\, -x$$

$$2x > 2 \;\big|\, :2$$

$$x > 1$$

0 1 x

Taigi visi x iš intervalo $(1; +\infty)$ yra nelygybės $3x > x+2$ sprendiniai, t. y. su tomis x reikšmėmis reiškinys $3x$ įgyja didesnes reikšmes negu reiškinys $x+2$.

Pasakykite nelygybės sprendinius.
a) $3x < x+2$; b) $3x \geqslant x+2$; c) $3x \leqslant x+2$.

Nelygybės

$$A(x) < B(x), \quad A(x) > B(x), \quad A(x) \leqslant B(x), \quad A(x) \geqslant B(x),$$

kur $A(x)$ ir $B(x)$ yra reiškiniai pavidalo $ax+b$ (a, b — skaičiai), vadinamos *tiesinėmis* (pirmojo laipsnio).

Pratimai ir uždaviniai

258. Išspręskite nelygybę.

a) $5x < 3x - 2$; b) $-5 + 3x \geqslant 6x - 1$; c) $\sqrt{2}x > \sqrt{2}$;

d) $2(x - 5) \leqslant -4(4 - 2x) - 3$; e) $15x - (x - 1) \leqslant \sqrt{3}$.

259. Su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę reiškinys:

a) $\sqrt{x+3}$? b) $\sqrt{3x-15}$? c) $2x\sqrt{5-2x}$?

d) $\frac{\sqrt{2x+1}}{x}$? e) $\sqrt[3]{4x-4}$? f) $\sqrt[4]{6-5x}$?

g) $\frac{1}{2x+6}$? h) $7\sqrt{3-x} + 5\sqrt{5x-10} - \frac{3}{2}$?



1) Prisiminkite kvadratinės šaknies apibrėžimą:

$\sqrt{a} = b$, kai $b^2 = a$ ir $\underline{a, b \geqslant 0}$.

Analogiškai apibrėžiamos ir kitos lyginio laipsnio šaknys:

$\sqrt[2n]{a} = b$, kai $b^{2n} = a$; $\underline{a, b \geqslant 0}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

2) Nelyginio laipsnio šaknis turi prasmę ir tada, kai pošaknis neigiamas.

3) Trupmena $\frac{a}{b}$ neturi prasmės, kai $b = 0$.

260. Nebraižydami grafiko, nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis tiesė $y = ax + b$ (a, b — skaičiai) yra virš x ašies, jei tiesės lygtis yra:

a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = 3x$;

d) $y = -x$; e) $y = -2x$; f) $y = -3x$;

g) $y = x + 2$; h) $y = 2x - 2$; i) $y = 3x + 2$;

j) $y = -x + 2$; k) $y = -3x - 2$; l) $y = -3x - 2$.



1) Virš x ašies yra ta tiesės $y = ax + b$ dalis, kur $ax + b > 0$.

2) Išspręskime tiesinę nelygybę $ax + b > 0$ (čia a ir b — skaičiai ($a \neq 0$), x — nežinomasis).

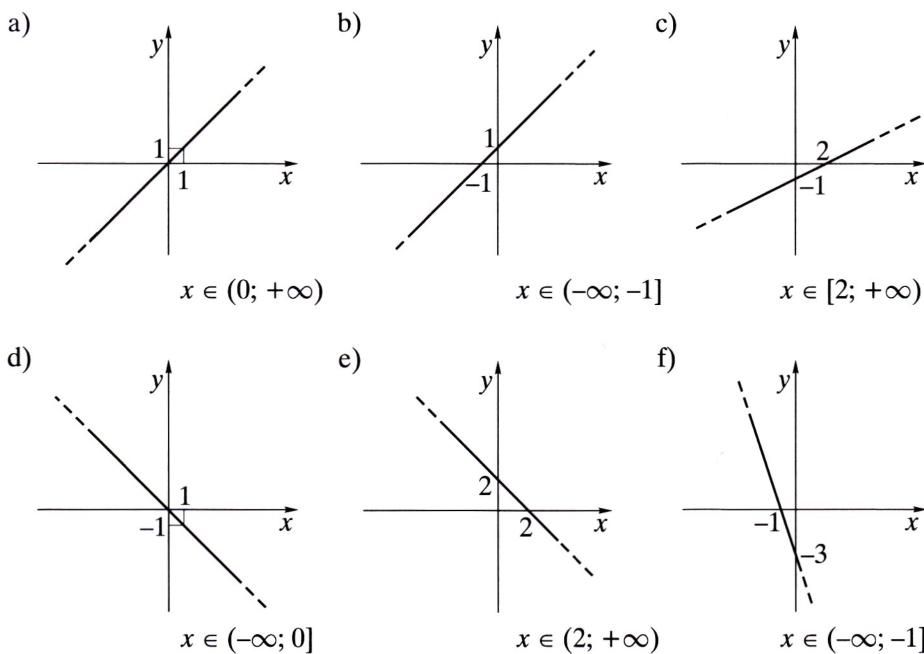
$ax + b > 0$,

$ax > -b$;

- jei $a > 0$, tai
  $x > -\frac{b}{a}$, $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- jei $a < 0$, tai
  $x < -\frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

3) Nelygybės abi puses dalydami iš neigiamojo skaičiaus, nelygybės ženklą keičiame priešingu.

261. Mokinys sprendė nelygybę $ax + b \bullet 0$ (kur $\bullet$ žymi vieną iš nelygybės ženklų: $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$). Jis nubraižė funkcijos $y = ax + b$ grafiką ir, remdamasis juo, parašė atsakymą. Iš grafiko ir atsakymo nustatykite, kokią nelygybę sprendė mokinys.



262. Išspręskite dviejų tiesinių nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x - 1 > x + 3, \\ 5x \leqslant 3x + 20; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -7x - 2 < 2(x - 4), \\ -4x - 15 \geqslant 3(1 - 2x) + 5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\left(\frac{1}{8} - 0{,}2x\right) > 0, \\ -3(\sqrt{2}x - 1) \leqslant 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(x - 5) \geqslant x^2 - 2x + 1, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$



Išspręsti dviejų tiesinių nelygybių sistemą reiškia rasti abiejų nelygybių *bendruosius* sprendinius.

263. Išspręskite dvigubąją nelygybę.

a) $3 < 2x < 5x + 2$;

b) $5x - 2 < x \leqslant 10x + 2$;

c) $4(1 - x) \leqslant 5x + 3 \leqslant -(x + 15)$;

d) $-1 \leqslant |x| \leqslant 0$.



Dviguboji nelygybė $f(x) < g(x) < h(x)$ reiškia nelygybių sistemą:

$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) < h(x). \end{cases}$

5.2. Kvadratinės nelygybės

Kaip spręsti nelygybę $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) > 0$?

Panagrinėkime nelygybę

$$f(x) \cdot g(x) > 0,$$

kur $f(x)$ ir $g(x)$ yra pavidalo $ax + b$ (a ir b skaičiai) reiškiniai.
Imkime, pavyzdžiui, nelygybę

$$(x + 5)(x - 3) > 0.$$

Spręsdami šią nelygybę, turime nustatyti tas x reikšmes, su kuriomis reiškinių $x + 5$ ir $x - 3$ sandauga yra didesnė už 0. Sandaugos ženklas priklauso nuo dauginamųjų ženklų:

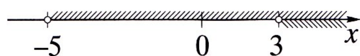
Dauginamųjų ženklai		Sandaugos ženklas
⊕ · ⊕	=	⊕
⊕ · ⊖	=	⊖
⊖ · ⊕	=	⊖
⊖ · ⊖	=	⊕

Taigi nelygybė $(x + 5)(x - 3) > 0$ bus teisinga, kai abu dauginamieji $x + 5$ ir $x - 3$ bus vienodų ženklų — arba abu teigiami, arba abu neigiami, t. y.:

$$\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x + 5 < 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$$

Šių dviejų nelygybių sistemų sprendiniai ir yra nelygybės $(x + 5)(x - 3) > 0$ sprendiniai. Išsprendžiame abi sistemas:

$$\begin{cases} x > -5, \\ x > 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -5, \\ x < 3. \end{cases}$$





$x \in (3; +\infty)$ $\qquad$ $x \in (-\infty; -5)$

Taigi nelygybės $(x + 5)(x - 3) > 0$ sprendiniai yra intervalų $(-\infty; -5)$ ir $(3; +\infty)$ skaičiai, t. y.

$$x \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty).$$


Pasakykite sprendinius
1) nelygybių: $(x + 5)(x - 3) \geqslant 0$, $(x + 5)(x - 3) < 0$, $(x + 5)(x - 3) \leqslant 0$;
2) lygties $(x + 5)(x - 3) = 0$.

Kaip spręsti nelygybę $ax^2 + bx + c > 0$?

Sudauginkime dvinarius $x + 5$ ir $x - 3$, t. y. atskliauskime reiškinį $(x + 5)(x - 3)$:

$$(x + 5)(x - 3) = x^2 - 3x + 5x - 15 = x^2 + 2x - 15.$$

Akivaizdu, kad nelygybė

$$x^2 + 2x - 15 > 0$$

yra ekvivalenti nelygybei

$$(x + 5)(x - 3) > 0.$$

Vadinasi, nelygybę $x^2+2x-15 > 0$ galima pakeisti nelygybe $(x+5)(x-3) > 0$, kurią nesunku išspręsti remiantis sandaugos ženklo nustatymo taisyklėmis. Kitaip sakant, sprendžiant nelygybę $x^2 + 2x - 15 > 0$, reikia kvadratinį trinarį

$$x^2 + 2x - 15$$

išskaidyti dauginamaisiais.
Prisiminkime:

Jei x_1 ir x_2 yra kvadratinio trinario

$$ax^2 + bx + c$$

šaknys, t. y. lygties

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sprendiniai, tai

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Jei kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ šaknų neturi, t. y. lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ neturi sprendinių (o taip yra, kai $D = b^2 - 4ac < 0$), tai to trinario negalima išskaidyti dauginamaisiais.

Taigi kvadratinį trinarį $x^2+2x-15$ tiesiniais (pirmojo laipsnio) dauginamaisiais galima išskaidyti taip:

$$x^2 + 2x - 15 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0,$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 8}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 8}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Vadinasi,

$$x^2 + 2x - 15 = 1 \cdot (x - 3) \cdot \big(x - (-5)\big) =$$
$$= (x - 3)(x + 5).$$

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.
Išskaidykime kvadratinį trinarį $2x^2 + 3x - 2$ dauginamaisiais:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0, \quad D = 25 > 0,$$
$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0{,}5;$$
$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)(x - 0{,}5).$$

Taigi nelygybė $2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$ ekvivalenti nelygybei

$$2(x + 2)(x - 0{,}5) \leqslant 0 \;\Big|\; : 2$$
$$(x + 2)(x - 0{,}5) \leqslant 0.$$

O šios nelygybės sprendinius galima rasti išsprendus tokias dvi nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x - 0{,}5 \leqslant 0; \end{cases}$

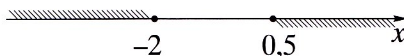
$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant 0{,}5; \end{cases}$



$x \in [-2; 0{,}5]$

2) $\begin{cases} x + 2 \leqslant 0, \\ x - 0{,}5 \geqslant 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 0{,}5. \end{cases}$



$\varnothing$

Atsakymas. $x \in [-2; 0{,}5]$.

? Pasakykite nelygybės $2x^2 + 3x - 2 > 0$ sprendinius.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę

$$2x^2 + 3x + 2 > 0.$$

Bandome kvadratinį trinarį $2x^2 + 3x + 2$ išskaidyti dauginamaisiais:

$$2x^2 + 3x + 2 = 0, \quad D = -7 < 0.$$

Vadinasi, lygtis $2x^2 + 3x + 2 = 0$ sprendinių neturi, taigi ir kvadratinio trinario $2x^2 + 3x + 2$ negalima išskaidyti dauginamaisiais.
Ką daryti? Mąstykime taip.
Ką reiškia, kad kvadratinis trinaris $2x^2 + 3x + 2$ su jokia x reikšme nelygus 0? Tai reiškia, kad su visomis x reikšmėmis jis įgyja arba *tik teigiamas*, arba *tik neigiamas reikšmes*.
Pažiūrėkime, kokias reikšmes įgyja kvadratinis trinaris

$$2x^2 + 3x + 2.$$

Imkime bet kokią x reikšmę (patogiausia imti $x = 0$) ir apskaičiuokime to trinario reikšmę:

$$\text{kai } x = 0, \text{ tai } 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 > 0.$$

O tai reiškia, kad trinaris $2x^2 + 3x + 2$ *teigiamas* su visomis x reikšmėmis, t. y.

$$2x^2 + 3x + 2 > 0, \quad \text{kai } x \in \boldsymbol{R}.$$

Atsakymas. $x \in (-\infty; +\infty)$.

? Pasakykite nelygybės $2x^2 + 3x + 2 < 0$ sprendinius.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę

$$x^2 - 2x + 1 \leqslant 0.$$

Išskaidykime kvadratinį trinarį

$$x^2 - 2x + 1$$

dauginamaisiais:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad D = 0;$$

$$x_1 = x_2 = 1;$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Taigi nelygybė $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$ ekvivalenti nelygybei

$$(x - 1)^2 \leqslant 0.$$

O šios nelygybės sprendinius nesunku nurodyti, nes reiškinys

$$(x - 1)^2$$

su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x = 1$, įgyja didesnes už 0 reikšmes, ir tik su viena reikšme $x = 1$ jis lygus 0.
Taigi nelygybė

$$(x - 1)^2 \leqslant 0$$

turi vieną sprendinį

$$x - 1 = 0, \quad x = 1.$$

Atsakymas. $x = 1$.

Pastaba. Kvadratinį trinarį $x^2 - 2x + 1$ išskaidyti dauginamaisiais galėjome ir neieškodami jo šaknų (nespręsdami lygties $x^2 - 2x + 1 = 0$). Galima buvo iš karto pastebėti, kad

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2,$$

t. y. remtis skirtumo kvadrato formule $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

? Pasakykite nelygybės $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ sprendinius.

Pratimai ir uždaviniai

264. Išspręskite nelygybę.

a) $(x+5)(x+1) < 0$;

b) $(x-1)(x-3) > 0$;

c) $(x-2)(x+2) \geqslant 0$;

d) $(2-x)(x+3) \leqslant 0$;

e) $-2(2x-1)(5+4x) > 0$;

f) $5(-x+5)(2x+6) \leqslant 0$;

g) $x(2x-\frac{5}{7}) < 0$;

h) $-x(-5-\frac{7}{9}x) > 0$.



Sandauga $a \cdot b > 0$, kai abu dauginamieji a ir b yra vienodų ženklų (arba abu teigiami, arba abu neigiami).

265. Išspręskite nelygybes.

a) $x^2+6x-7<0$, $x^2+6x-7 \geqslant 0$;

b) $x^2+7x+10 \geqslant 0$, $x^2+7x+10 \leqslant 0$;

c) $x^2-10x+24 \leqslant 0$, $x^2-10x+24 > 0$;

d) $6x^2+5x+6>0$, $6x^2+5x+6<0$;

e) $-2x^2+13x-15<0$, $-2x^2+13x-15>0$;

f) $-3x^2-8x+3 \geqslant 0$, $-3x^2-8x+3<0$.



Jei x_1 ir x_2 yra kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknys, tai $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

266. Išspręskite nelygybes.

a) $x^2+x+1>0$, $x^2+x+1 \leqslant 0$;

b) $2x^2+5x+4<0$, $x^2+5x+4>0$;

c) $-x^2+x-3 \leqslant 0$, $-x^2+x-3 \geqslant 0$;

d) $-5x^2+2x-1 \geqslant 0$, $-5x^2+2x-1<0$;

e) $4x^2-x<-1$, $-x \geqslant 1+4x^2$;

f) $4x^2-x>0$, $4x^2 \leqslant -x$;

g) $10x^2+10<0$, $10x^2 \geqslant 10$.



Jei kvadratinis trinaris ax^2+bx+c neturi šaknų, tai su visomis x reikšmėmis jis įgyja arba tik teigiamas, arba tik neigiamas reikšmes, t. y. su visais x yra teisinga arba nelygybė $ax^2+bx+c>0$, arba nelygybė $ax^2+bx+c<0$.

267. Išspręskite nelygybes.

a) $x^2 + 4x + 4 \geqslant 0, \quad x^2 + 4x + 4 \leqslant 0;$

b) $x^2 - 10x + 25 < 0, \quad x^2 - 10x + 25 > 0;$

c) $4x^2 - 12x + 9 > 0, \quad 4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0;$

d) $-25x^2 + 30x - 9 \leqslant 0, \quad 25x^2 - 30x + 9 \leqslant 0;$

e) $5x^2 < 0, \quad 5x^2 \geqslant 0, \quad -5x^2 \leqslant 0.$



Jei lygties $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantas $D = 0$, tai lygtis turi vieną sprendinį x_1, o $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

---

268. Mokinys sprendė nelygybę $-x^2 - x + 2 \geqslant 0$:

$-x^2 - x + 2 \geqslant 0,$

$-x^2 - x + 2 = 0 \mid \cdot (-1),$

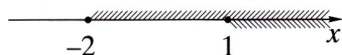
$x^2 + x - 2 = 0, \quad D = 9 > 0,$

$x_1 = 1, x_2 = -2;$

$(x - 1)(x + 2) \geqslant 0,$

1) $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \geqslant -2; \end{cases}$



$x \in [1; +\infty)$

2) $\begin{cases} x - 1 \leqslant 0, \\ x + 2 \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \leqslant -2. \end{cases}$



$x \in (-\infty; -2)$

Atsakymas. $x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

1) Raskite klaidas mokinio sprendime.
2) Kokiu pažymiu įvertintumėte mokinio sprendimą?
3) Išspręskite tą nelygybę patys.

269. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x^2 + 2x > 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 2)(x + 3) > 0, \\ x(x - 1) \leqslant 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 \geqslant 0, \\ 2x - 3 \leqslant 5(x - 1); \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4x < 5, \\ 3x \geqslant x^2. \end{cases}$

5.3. Racionaliosios nelygybės

Praeitame skyrelyje sprendėme nelygybę

$$(x+5)(x-3) > 0.$$

Tuos pačius sprendinius turi ir nelygybės

$$\frac{x+5}{x-3} > 0, \qquad \frac{x-3}{x+5} > 0.$$

Akivaizdu, kad nelygybes, kurias galima užrašyti pavidalu

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0,$$

irgi galima spręsti remiantis trupmenos ženklo nustatymo taisyklėmis.

Skaitiklio, vardiklio ženklai		Trupmenos ženklas
⊕ : ⊕	=	⊕
⊕ : ⊖	=	⊖
⊖ : ⊕	=	⊖
⊖ : ⊖	=	⊕

Kitaip sakant, trupmena yra teigiama, kai skaitiklis ir vardiklis yra vienodų ženklų; trupmena yra neigiama, kai skaitiklis ir vardiklis yra skirtingų ženklų.


Pasakykite, kada trupmena $\frac{a}{b}$ lygi 0; kada neapibrėžta.

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\frac{2x-3}{5x+8} > 0$.

Sprendimas. Trupmena

$$\frac{2x-3}{5x+8}$$

yra teigiama, kai skaitiklis ir vardiklis yra vienodų ženklų. Todėl nelygybės

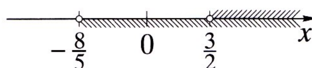
$$\frac{2x-3}{5x+8} > 0$$

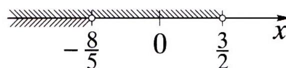
sprendinius rasime išsprendę dvi nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ 5x+8 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ 5x+8 < 0. \end{cases}$$

Išsprendę jas, gauname:

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ x > -\frac{8}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2}, \\ x < -\frac{8}{5}. \end{cases}$$





$x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ $\qquad$ $x \in \left(-\infty; -\frac{8}{5}\right)$

Vadinasi, nelygybės $\frac{2x-3}{5x+8} > 0$ sprendiniai yra

$$x \in \left(-\infty; -\frac{8}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Pasakykite nelygybės $\frac{2x-3}{5x+8} < 0$ sprendinius.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\frac{4+2x}{7x-3} \leqslant 0$.
Sprendimas. Trupmena

$$\frac{4+2x}{7x-3}$$

yra neigiama, kai skaitiklis ir vardiklis yra skirtingų ženklų. Be to, negriežtoji nelygybė

$$\frac{4+2x}{7x-3} \leqslant 0$$

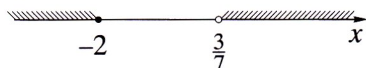
yra teisinga ir tada, kai skaitiklis $4+2x$ yra lygus 0.
Vadinasi, nelygybės $\frac{4+2x}{7x-3} \leqslant 0$ sprendiniai yra šių nelygybių sistemų

$$\begin{cases} 4+2x \leqslant 0, \\ 7x-3 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4+2x \geqslant 0, \\ 7x-3 < 0 \end{cases}$$

sprendiniai. Jas išsprendę gauname:

$$\begin{cases} 2x \leqslant -4, \\ 7x > 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \geqslant -4, \\ 7x < 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x > \frac{3}{7}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < \frac{3}{7}. \end{cases}$$





$\varnothing$ $\qquad$ $x \in \left[-2; \frac{3}{7}\right)$

Atsakymas. $x \in \left[-2; \frac{3}{7}\right)$.

Nurodykite nelygybės $\frac{4+2x}{7x-3} \geqslant 0$ sprendinius.

Pratimai ir uždaviniai

270. Išspręskite nelygybes.

a) $\frac{2}{x} > 0$, $\frac{-2}{x} < 0$, $\frac{x}{2} \geqslant 0$, $-\frac{x}{2} < 0$;

b) $\frac{2x+1}{x} > 0$, $\frac{2x+1}{x} < 0$, $\frac{2x+1}{x} \geqslant 0$, $\frac{2x+1}{x} \leqslant 0$;

c) $\frac{x+7}{x-3} < 0$, $\frac{x+7}{x-3} > 0$, $\frac{x+7}{x-3} \leqslant 0$, $\frac{3-x}{x+7} \geqslant 0$;

d) $\frac{5x-1}{2x+10} \geqslant 0$, $\frac{1-5x}{2x+10} \leqslant 0$, $\frac{2x+10}{5x-1} < 0$;

e) $-\frac{2-4x}{5x+25} > 0$, $\frac{2-4x}{5x+25} < 0$, $\frac{4x-2}{5x+25} < 0$, $\frac{4x-2}{5x+25} \leqslant 0$, $\frac{5x+25}{4x-2} \geqslant 0$.

271. Išspręskite nelygybes.

a) $\frac{1}{x} - 1 \geqslant 0$, $\frac{1}{x} \geqslant 1$, $\frac{1}{x} - 1 < 0$, $-\frac{x}{2} < 0$;

b) $2 - \frac{5}{x} \geqslant 0$, $\frac{5}{x} \geqslant -2$, $\frac{5}{x} + 2 < 0$.

272. Išspręskite nelygybes.

a) $\frac{x^2}{2x-3} < 0$, $\frac{x^2}{2x-3} \geqslant 0$;

b) $\frac{5x+10}{|x|} \leqslant 0$, $\frac{5x+10}{|x|} > 0$.

273. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} \frac{5}{x} > 0, \\ -\frac{x-1}{4x+2} \leqslant 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+5}{5-x} > 0, \\ \frac{2-x}{x+2} \leqslant 0. \end{cases}$

274. Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, jei:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$;

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$;

c) $f(x) = \frac{5}{x} + \sqrt{x+5}$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - \frac{5x}{x^2-1}$.

275. Sugalvokite racionaliąją nelygybę, kurios sprendiniai būtų.

a) $x \in (0; +\infty)$;

b) $x \in (5; +\infty)$;

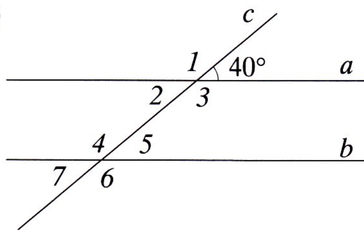
c) $\varnothing$;

d) $x \in (-3; 4]$.

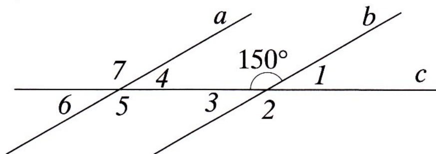
5.4. Geometrijos uždaviniai

276. Tiesės a ir b yra lygiagrečios. Tiesė c kerta tieses a ir b. Raskite skaitmenimis pažymėtų kampų dydžius.

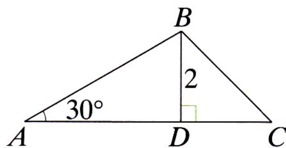
a)

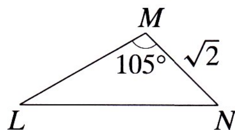


b)



277. Brėžinyje pavaizduoti du panašūs trikampiai: $\triangle ABC \backsim \triangle LMN$.

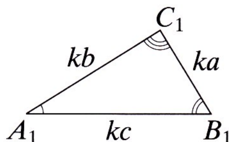


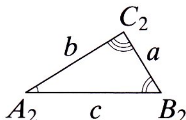


1) Raskite trikampių kampų dydžius.
2) Apskaičiuokite AB ilgį.
3) Apskaičiuokite BC ilgį.
4) Apskaičiuokite AD, DC ir AC ilgius.
5) Kam lygus trikampių panašumo koeficientas?
6) Kam lygūs kraštinių LM ir LN ilgiai?
7) Kam lygus $\triangle LMN$ aukštinės, nubrėžtos į kraštinę LM, ilgis?
8) Apskaičiuokite trikampio ABC perimetrą ir plotą. Kam lygus $\triangle LMN$ perimetras ir plotas?



Trikampiai vadinami *panašiais*, jei jų atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos kraštinės yra proporcingos.



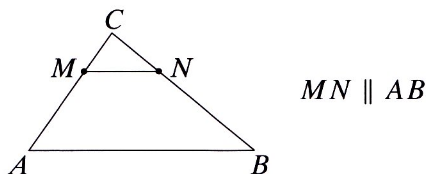


$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$,
$\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$,
$\angle C_1 = \angle C_2$;
$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = k$,
k — panašumo koeficientas.

$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle A_2B_2C_2}} = k$ — panašių trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.

$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = k^2$ — panašių trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

278. a) Trikampyje ABC nubrėžta atkarpa MN, lygiagreti kraštinei AB.



1) Trikampiai ABC ir MNC yra panašūs. Paaiškinkite, kodėl.
2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 40°$. Kam lygūs $\triangle MNC$ kampai?
3) $\frac{AB}{MN} = 3$. Kam lygūs santykiai

$$\frac{AC}{MC}, \quad \frac{NC}{BC}, \quad \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNC}}, \quad \frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}}?$$

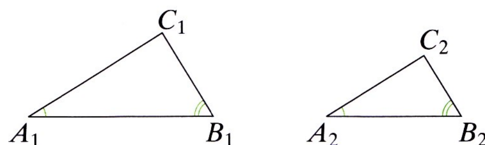
4) $AB = 12$ cm. Apskaičiuokite: MN ilgį; AC ir BC ilgius; $\triangle ABC$ ir $\triangle CMN$ plotus.



Trikampių panašumo požymiai

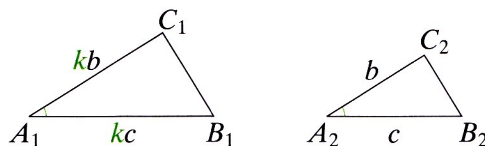
I. Trikampių panašumas pagal du kampus.

Jei $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



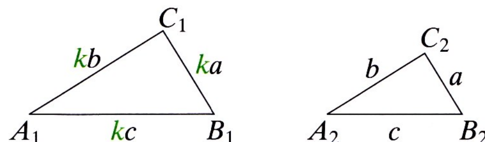
II. Trikampių panašumas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

Jei $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$ ir $\angle A_1 = \angle A_2$, tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



III. Trikampių panašumas pagal tris kraštines.

Jei $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = k$, tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.

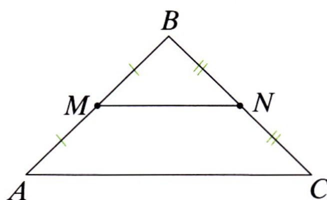


---

b) Apskaičiuokite trikampio dalių, į kurias trikampį dalija jo vidurinė linija, plotų santykį.

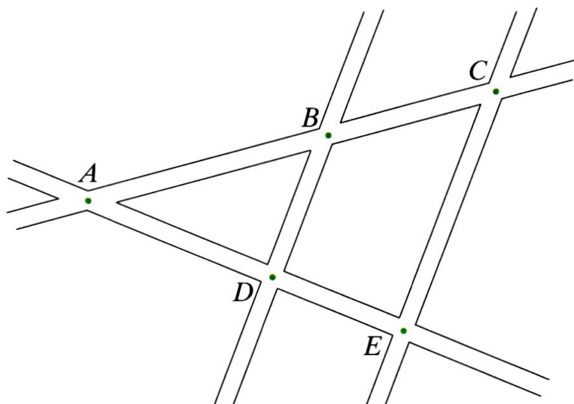


Trikampio kraštinių vidurio taškus jungianti atkarpa vadinama jo vidurine linija.



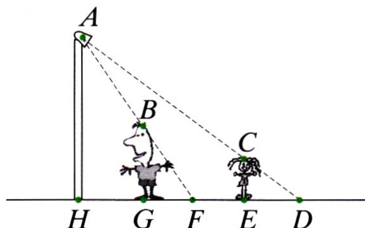
$AM = MB$, $CN = NB$,
MN — vidurinė linija;
$MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$.

279. Schemoje pavaizduotos 4 gatvės. Dvi iš jų yra lygiagrečios.



Apskaičiuokite atstumą BD, jei $AD = 2\,\text{km}$, $DE = 1{,}6\,\text{km}$, $EC = 3{,}8\,\text{km}$.

280. Paveikslėlyje pavaizduotas stulpas su jo viršuje pritvirtintu žibintu (A). Žibintas apšviečia berniuką ir mergaitę. Berniuko ir mergaitės šešėliai yra atitinkamai GF ir ED ilgio:



1) Kurie iš trikampių ADH, CDE, AFH, BFG yra panašūs?
2) Apskaičiuokite mergaitės šešėlio ilgį ED, jei stulpo aukštis $HA = 250\,\text{cm}$, mergaitės ūgis $EC = 150\,\text{cm}$, o atstumas $HD = 430\,\text{cm}$.
3) Apskaičiuokite berniuko ūgį GB, jei $\angle AFH = 45^\circ$, o $BF = 255\,\text{cm}$.
4) Apskaičiuokite atstumą GE tarp vaikų.

5.5. Pasitikrinkime

281. Išspręskite tiesinę nelygybę.

a) $2x < x - 1$; b) $5x + 3 \geqslant -7(5 - 2x)$.

282. Išspręskite kvadratinę nelygybę.

a) $x^2 > 9$; b) $-x^2 \geqslant 4$; c) $3x^2 + 9 > 0$;

d) $4x^2 - 3x > 0$; e) $6x^2 + x \leqslant 0$; f) $-2x^2 \geqslant 5x$;

g) $x^2 - 7x - 30 > 0$; h) $x^2 + 5x + 9 \geqslant 0$; i) $x^2 - 10x + 25 \leqslant 0$.

283. Išspręskite racionaliąją nelygybę.

a) $\frac{5x-3}{2x+4} > 0$; b) $\frac{2}{x} + 5 \leqslant 0$;

c) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)} > 0$; d) $\frac{(x-5)(5-x)}{x^2+10} \leqslant 0$.

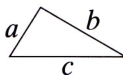
284. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 4(x - 1) \leqslant 5x + 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5(1 - x) \leqslant 3x + 1, \\ 4x^2 - 2x > 0. \end{cases}$

285. Trikampio viena kraštinė 2 cm ilgesnė už kitą ir 2 cm trumpesnė už trečiąją. Kokio ilgio gali būti vidurinioji to trikampio kraštinė?



Trikampio trumpesniųjų kraštinių ilgių suma turi būti didesnė už ilgiausiąją kraštinę.



$a < b < c$,
$a + b > c$

286. Ar egzistuoja trikampis, kurio trumpesniųjų kraštinių ilgiai yra vienas kitam atvirkštiniai skaičiai, o ilgiausioji kraštinė lygi 2?



Du skaičiai vadinami vienas kitam atvirkštiniais, jei jų sandauga lygi 1. Vienas kitam atvirkštinių skaičių pavyzdžiai: 5 ir $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{2}$ ir $\frac{2}{3}$.

287. a) Medžio šešėlio ilgis yra 80 m. Šalia stovinčio žmogaus, kurio ūgis 1,8 m, šešėlio ilgis yra 18 m. Koks medžio aukštis?

b) Šalia 2,4 m aukščio stulpo auga 25 m aukščio medis. Raskite medžio šešėlio ilgį, jei stulpo šešėlio ilgis yra 1,8 m.

Skaičių kvadratai

Klausimas. Ar yra tokių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, kad būtų teisingos lygybės:

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_4^2 + b_5^2$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = c_5^2 + c_6^2 + c_7^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots?$$

Atsakymas. Taip:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Kaip rasti tuos skaičius? Žinoma, pakanka nustatyti pirmojo lygybės laipsnio pagrindą. Kitų laipsnių pagrindus gauname pridėdami vienetą. Rasti kiekvienos lygybės pagrindą labai paparasta! Tereikia žinoti taisyklę... O ji tokia:

Pirmojo kiekvienos lygybės dėmens pagrindą gauname visų lygybės dėmenų kiekį padauginę iš dešinės lygybės pusės dėmenų kiekio:

$a_1 = 3 \cdot 1 = 3; \quad b_1 = 5 \cdot 2 = 10; \quad c_1 = 7 \cdot 3 = 21; \quad \dots$

6 LAIPSNINĖ FUNKCIJA

6.1. Funkcija $f(x) = x^n$

Lyginio laipsnio funkcijos

Panagrinėkime funkcijas

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4, \quad f_3(x) = x^6, \quad \ldots, \quad f_n(x) = x^{2n} \quad (n \in \boldsymbol{N}).$$

Kadangi šių funkcijų reiškiniai yra laipsniai su lyginiais laipsnių rodikliais, tai šias funkcijas trumpiau vadinsime lyginio laipsnio funkcijomis.

Reiškiniai

$$x^2, \quad x^4, \quad x^6, \quad \ldots, \quad x^{2n} \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

turi prasmę su visomis x reikšmėmis. Todėl lyginio laipsnio funkcijų apibrėžimo sritis:

$$D_f = (-\infty; +\infty).$$

Pastebėkime, kad, pakėlę lyginiu laipsniu bet kokį skaičių, gauname *neneigiamąjį* skaičių, pavyzdžiui:

$$(-2)^2 = 4, \quad 0^6 = 0, \quad 3^4 = 81.$$

Todėl lyginio laipsnio funkcijų reikšmių sritis:

$$E_f = [0; +\infty).$$

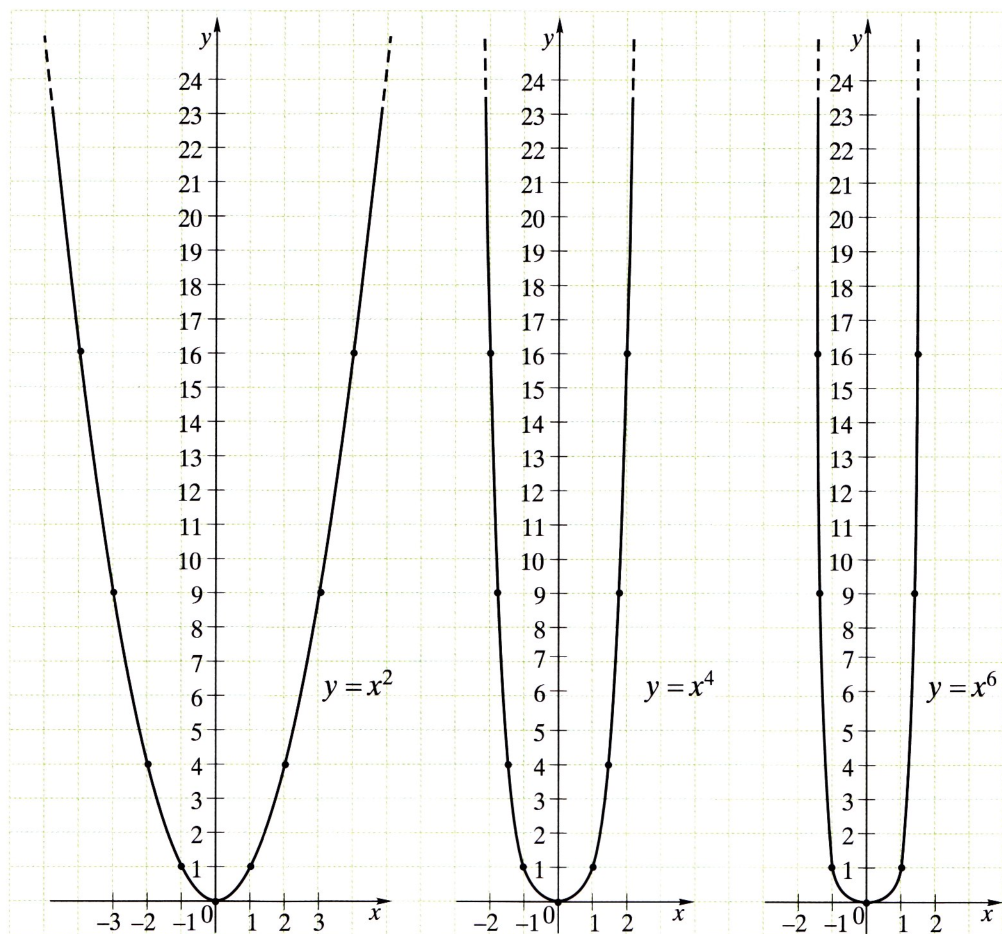
Lyginio laipsnio funkcijos yra lyginės, nes

$$f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x).$$

Vadinasi, jų grafikai yra simetriški Oy ašies atžvilgiu.


1 užduotis. Panagrinėję lyginio laipsnio funkcijų grafikus, pasakykite:
a) funkcijos $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus;
b) taškus, kurie priklauso visų funkcijų $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ grafikams.

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$x^2 =$		4		1		0		1		4	
$x^4 =$		16		1		0		1		16	
$x^6 =$		64		1		0		1		64	



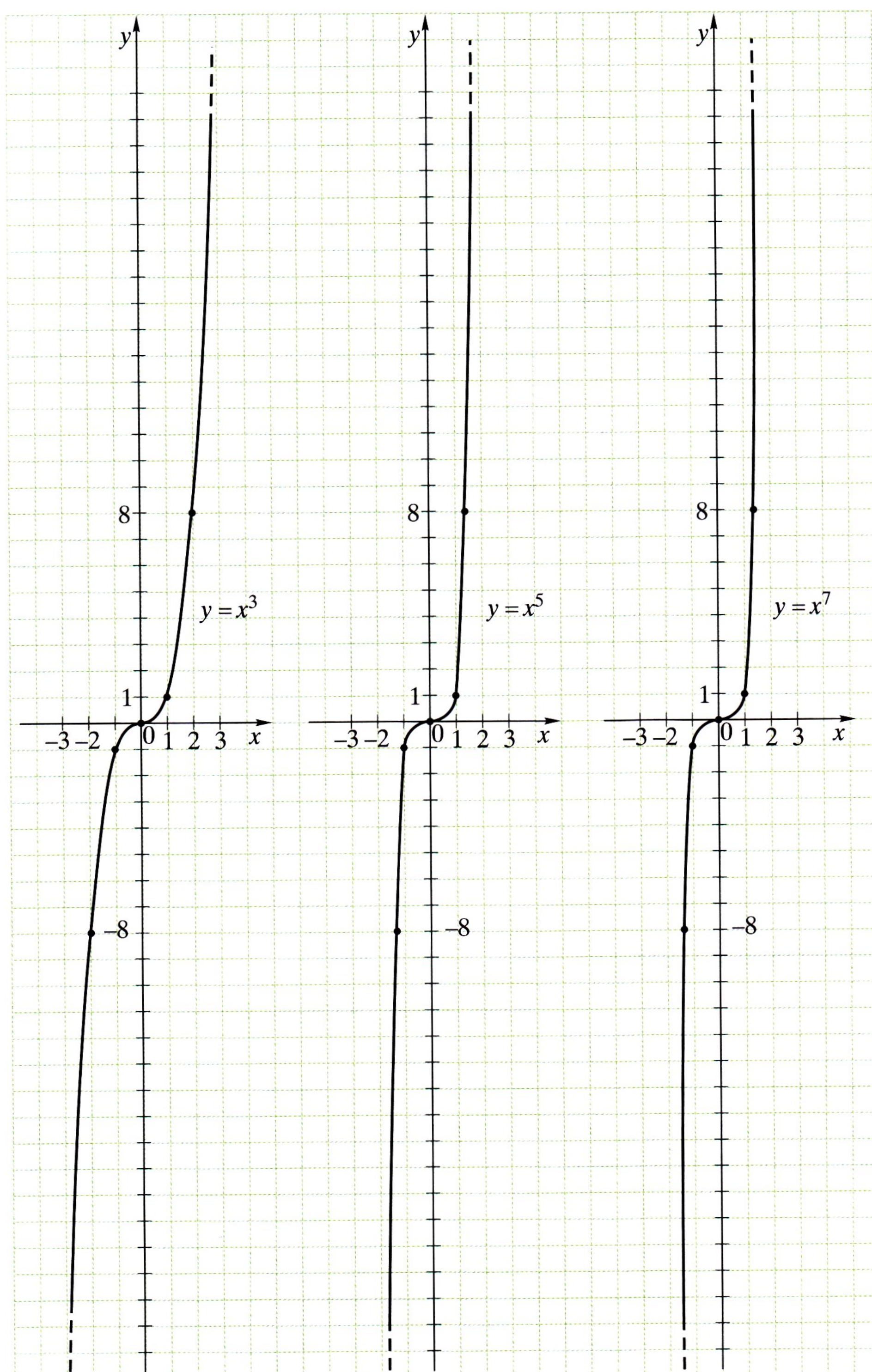
Nelyginio laipsnio funkcijos

2 užduotis. Pažiūrėję į funkcijų

$$g_1(x) = x^3, \quad g_2(x) = x^5, \quad g_3(x) = x^7$$

grafikus (žr. kitame psl.), apibūdinkite laipsnines funkcijas su nelyginiais laipsnio rodikliais, t. y. funkcijas $g(x) = x^{2n+1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

$x =$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$x^3 =$		-8		-1		0		1		8	
$x^5 =$		-32		-1		0		1		32	
$x^7 =$		-128		-1		0		1		128	


y
8
1
-3 -2
0 1 2 3
x
-8
$y = x^3$
y
8
1
-3 -2
0 1 2 3
x
-8
$y = x^5$
y
8
1
-3 -2
0 1 2 3
x
-8
$y = x^7$

Pratimai ir uždaviniai

288. Duotos funkcijos $f(x) = x^2$ ir $g(x) = x^3$. Apskaičiuokite:

a) $f(1) + g(1)$;

b) $f(-1) + g(-1)$;

c) $f(\sqrt{2}) + g(\sqrt{3})$;

d) $f(-0{,}2) - 4g\left(\frac{1}{2}\right)$;

e) $3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 5g(0)$.

289. Palyginkite funkcijų $f(x) = x^4$ ir $g(x) = x^5$ reikšmes:

a) $f(2{,}3)$ ir $f(2{,}4)$;

b) $g(3{,}5)$ ir $g(3{,}7)$;

c) $f(-1{,}1)$ ir $f(-1{,}2)$;

d) $g(-0{,}12)$ ir $g(-0{,}1)$;

e) $f(-3{,}3)$ ir $f(3{,}3)$;

f) $g(-3{,}3)$ ir $g(3{,}3)$;

g) $f(2{,}3)$ ir $g(2{,}3)$;

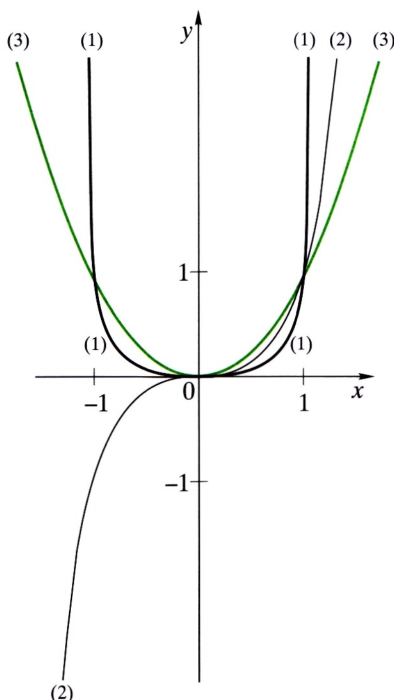
h) $f(-2{,}3)$ ir $g(-2{,}3)$.



Nusibraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus vienoje koordinačių plokštumoje.

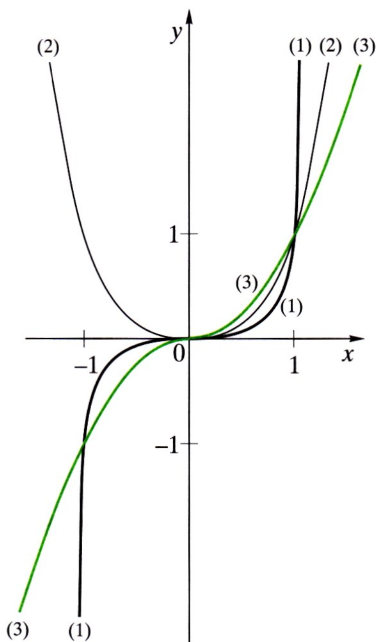
---

290. a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti grafikai trijų funkcijų: $f(x) = x^{12}$, $g(x) = x^{13}$, $h(x) = x^{14}$.



Kuris grafikas kurią funkciją atitinka? Paaiškinkite, kodėl.

b) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti grafikai trijų funkcijų: $f(x) = x^9$, $g(x) = x^{10}$, $h(x) = x^{11}$.



Kuris grafikas kurią funkciją atitinka? Paaiškinkite, kodėl.

291. a) Nurodykite bendruosius visų funkcijų $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, grafikų taškus.
b) Nurodykite bendruosius visų funkcijų $f(x) = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, grafikų taškus.
c) Nurodykite bendruosius visų funkcijų $f(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, grafikų taškus.

292. Pabaikite pildyti lentelę:

a)

$x =$	-2	-1	0	1	2
$x^5 =$	-32	-1	0	1	32
$x^5 + 1 =$					
$2x^5 =$					
$2x^5 + 1 =$					

b)

$x =$	-3	-1	0	1	3
$x^6 =$	729	1	0	1	729
$x^6 - 2 =$					
$3x^6 =$					
$3x^6 + 1 =$					

293. Nubraižykite funkcijų grafikus.

a) $f_1(x) = x^3 + 1, \quad f_2(x) = x^3 + 2, \quad f_3(x) = x^3 - 1;$

b) $m_1(x) = (x+1)^3, \quad m_2(x) = (x+2)^3, \quad m_3(x) = (x-1)^3;$

c) $n_1(x) = (x+1)^3 + 1, \quad n_2(x) = (x+2)^3 + 2, \quad n_3(x) = (x-1)^3 - 1;$

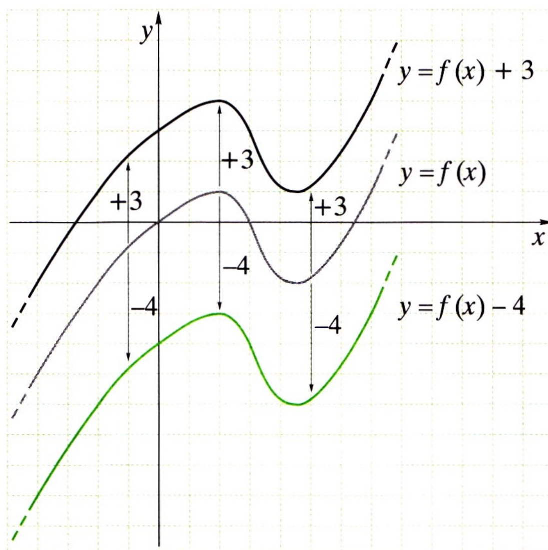
d) $g_1(x) = 2x^3, \quad g_2(x) = 4x^3;$

e) $h_1(x) = -2x^3, \quad h_2(x) = -4x^3;$

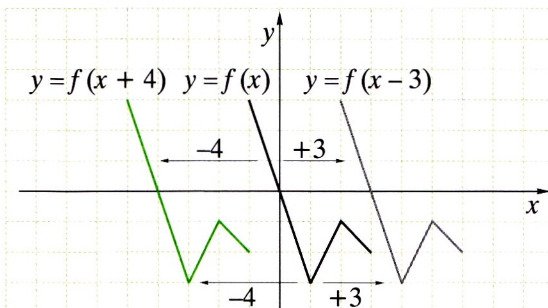
f) $l_1(x) = 2x^3 + 1, \quad l_2(x) = -4x^3 - 1.$



1) Grafiką $y = f(x) + n$ galima gauti pastūmus grafiką $y = f(x)$ per n vienetų (t. y. per n vienetų į viršų, jei $n > 0$, ir per $|n|$ vienetų į apačią, jei $n < 0$) lygiagrečiai y ašiai.



2) Grafiką $y = f(x + n)$ galima gauti pastūmus grafiką $y = f(x)$ per n vienetų lygiagrečiai x ašiai.



6.2. Lygtis $ax^n = b$

Išspręskime lygtis:

a) $x^5 = 32$; b) $2x^6 = 0{,}000002$; c) $3(3x-1)^4 = 48$.

Sprendimas.
a) Akivaizdu, kad lygties

$$x^5 = 32$$

sprendinys yra

$$x = 2,$$

nes $2^5 = 32$.
b) Pirmiausia padalykime lygtį

$$2x^6 = 0{,}000002$$

iš 2:

$$2x^6 = 0{,}000002 \mid : 2,$$
$$x^6 = 0{,}000001.$$

Akivaizdu, kad tinka

$$x = 0{,}1,$$

nes $0{,}1^6 = 0{,}000001$.
Be to, ir

$$x = -0{,}1$$

yra lygties sprendinys, nes

$$(-0{,}1)^6 = 0{,}000001.$$

c) Pirmiausia padalykime lygties abi puses iš 3:

$$3(3x-1)^4 = 48 \mid : 3,$$
$$(3x-1)^4 = 16.$$

Yra du skaičiai, kuriuos pakėlę 4-uoju laipsniu, gausime 16 — tai skaičiai -2 ir 2. Todėl lygties sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis teisingos šios dvi lygybės:

$$3x - 1 = -2, \qquad 3x - 1 = 2.$$

Išsprendę jas, gauname:

$$3x = -1, \qquad 3x = 3,$$
$$x = -\frac{1}{3}; \qquad x = 1.$$

Atsakymas. a) 2; b) $-0{,}1$; $0{,}1$; c) $-\frac{1}{3}$; 1.

Pratimai ir uždaviniai

294. Išspręskite lygtis.

a) $x^5 = 1, \quad x^5 = -1, \quad x^5 = 0;$

b) $x^4 = 1, \quad x^4 = -1, \quad x^4 = 0;$

c) $2x^3 = 8, \quad 2x^3 = -8, \quad 2x^3 = 0;$

d) $x^8 = 2, \quad x^9 = 2, \quad x^8 = -2, \quad x^9 = -2.$

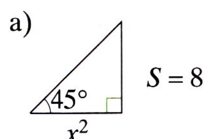
295. Išspręskite lygtį.

a) $(2x+4)^3 = 8;$ b) $(3x-5)^5 = -1;$

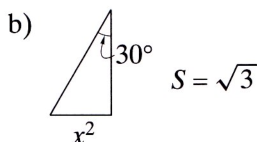
c) $(x^2-x)^2 = 36;$ d) $(5x^2-2)^4 = -16.$

296. Apskaičiuokite x.

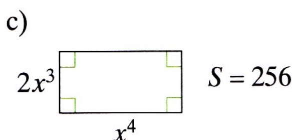
a)



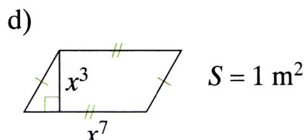
b)



c)

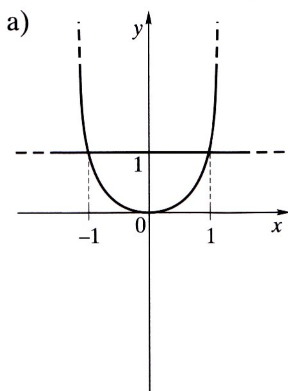


d)

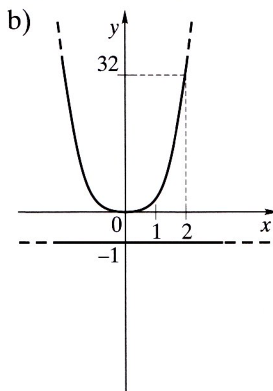


297. Mokinys lygtį, kurios pavidalas yra $ax^n = b$, sprendė grafiškai. Pirmiausia jis abi lygties puses padalijo iš a, t. y. lygčiai suteikė pavidalą $x^n = \frac{b}{a}$. Tada toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižė grafikus $y = x^n$ ir $y = \frac{b}{a}$.

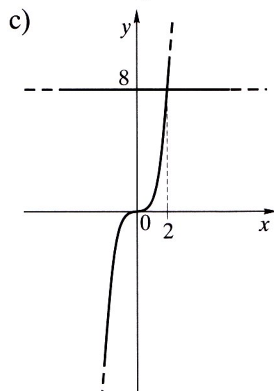
a)



b)



c)



1) Koks mokinio spręstos lygties atsakymas?

2) Kokią lygtį sprendė mokinys, jei: a) $b = 4$; b) $a = 4$?

3) Ar gali lygtis $ax^{2n} = b$ ($n \in \boldsymbol{N}$) neturėti sprendinių; turėti vieną sprendinį?

4) Ar gali lygtis $ax^{2n+1} = b$ ($n \in \boldsymbol{N}$) neturėti sprendinių; turėti daugiau kaip vieną sprendinį?

6.3. Funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Funkcija lyginio laipsnio šaknis

Panagrinėkime funkcijas

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sqrt[4]{x}, \quad f_3(x) = \sqrt[6]{x}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = \sqrt[2n]{x} \quad (n \in \boldsymbol{N}).$$

Kadangi šaknų rodikliai yra lyginiai, tai šias funkcijas galima vadinti lyginio laipsnio šaknies funkcijomis.

Reiškiniai

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt[4]{x}, \quad \sqrt[6]{x}, \quad \ldots, \quad \sqrt[2n]{x} \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

turi prasmę su *neneigiamomis* x reikšmėmis, nes lyginio laipsnio šaknies pošaknis negali būti neigiamas. Todėl šių funkcijų apibrėžimo sritis

$$D_f = [0; +\infty).$$

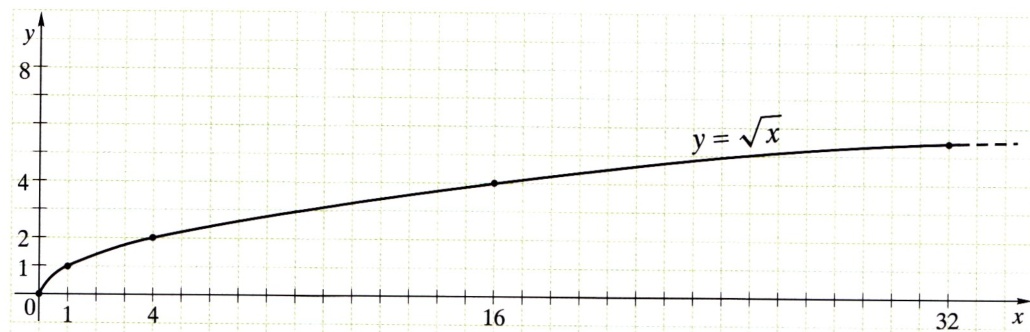
Lyginio laipsnio šaknis yra neneigiama, todėl nagrinėjamų funkcijų reikšmių sritis

$$E_f = [0; +\infty).$$

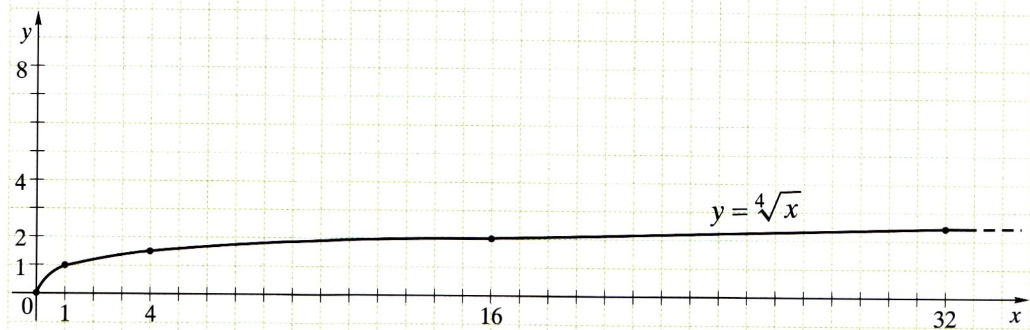
1 užduotis. Panagrinėję lyginio laipsnio šaknies funkcijų grafikus (žr. kitame psl.), pasakykite:

a) ar funkcija $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$, yra didėjančioji, ar yra mažėjančioji;
b) kurie taškai priklauso visų funkcijų $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$, grafikams;
c) ar funkcija $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$, yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.

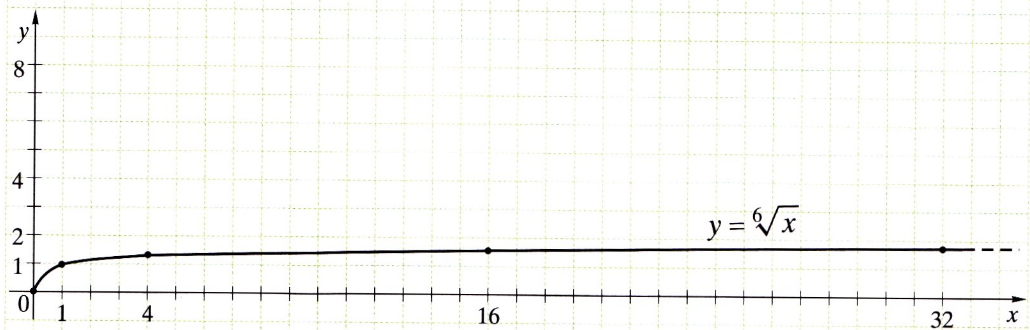
$x =$	0	...	1	...	4	...	16	...	32	...	64	...
$\sqrt{x} =$	0		1		2		4		$\approx 5{,}7$		8	
$\sqrt[4]{x} =$	0		1		$\approx 1{,}4$		2		$\approx 2{,}4$		$\approx 2{,}8$	
$\sqrt[6]{x} =$	0		1		$\approx 1{,}3$		$\approx 1{,}6$		$\approx 1{,}8$		2	



y
8
4
2
1
0
1
4
16
32
x
$y = \sqrt{x}$



y
8
4
2
1
0
1
4
16
32
x
$y = \sqrt[4]{x}$



y
8
4
2
1
0
1
4
16
32
x
$y = \sqrt[6]{x}$

Funkcija nelyginio laipsnio šaknis

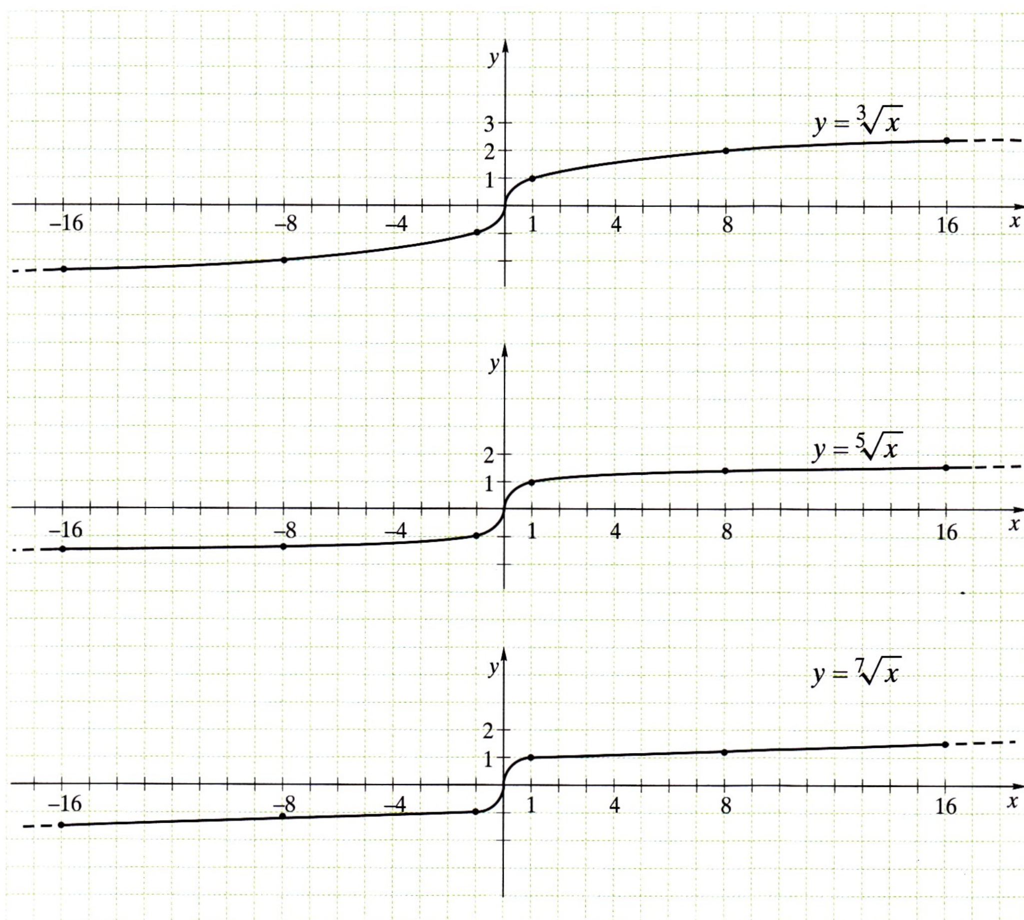
2 užduotis. Pažiūrėję į funkcijų

$$g_1(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g_2(x) = \sqrt[5]{x}, \quad g_3(x) = \sqrt[7]{x}$$

grafikus, apibūdinkite nelyginio laipsnio šaknies funkcijas, t. y. funkcijas

$$g(x) = \sqrt[2n+1]{x} \quad (n \in \boldsymbol{N}).$$

$x =$	...	-16	...	-8	...	-1	...	0	...	1	...	8	...	16	...
$\sqrt[3]{x} =$		$\approx -2{,}5$		-2		-1		0		1		2		$\approx 2{,}5$	
$\sqrt[5]{x} =$		$\approx -1{,}7$		$\approx -1{,}5$		-1		0		1		$\approx 1{,}5$		$\approx 1{,}7$	
$\sqrt[7]{x} =$		$\approx -1{,}5$		$\approx -1{,}3$		-1		0		1		$\approx 1{,}3$		$\approx 1{,}5$	



Pratimai ir uždaviniai

298. Duotos funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Apskaičiuokite:

a) $f(0) + g(1)$; b) $f(1) - g(-8)$; c) $f(81) + g(-729)$;

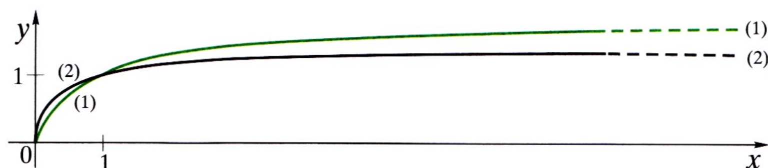
d) $f(1{,}21) - 2g(1{,}331)$; e) $3f(\frac{1}{9}) + 5g(0)$.

299. Palyginkite funkcijų $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ir $g(x) = \sqrt[5]{x}$ reikšmes:

a) $f(2{,}3)$ ir $f(2{,}4)$; b) $g(3{,}5)$ ir $g(3{,}7)$; c) $f(0{,}1)$ ir $f(0)$;

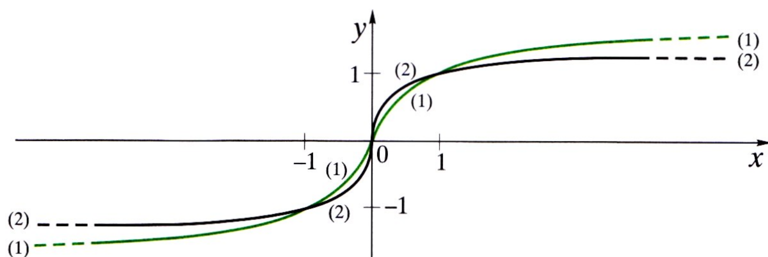
d) $g(-0{,}1)$ ir $g(-0{,}2)$; e) $f(2{,}3)$ ir $g(2{,}3)$; f) $f(10)$ ir $g(10)$.

300. a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti grafikai funkcijų $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ir $g(x) = \sqrt[6]{x}$:



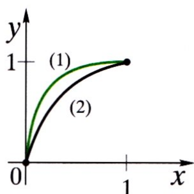
Kuris grafikas atitinka kurią funkciją? Paaiškinkite, kodėl.

b) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti grafikai funkcijų $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ir $g(x) = \sqrt[7]{x}$:



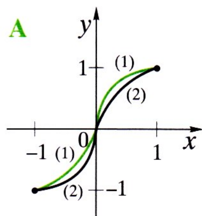
Kuris grafikas atitinka kurią funkciją? Paaiškinkite, kodėl.

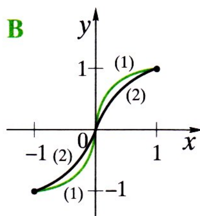
301. Vienoje koordinačių plokštumoje intervale $x \in [0; 1]$ nubraižyti grafikai funkcijų $f(x) = \sqrt[10]{x}$ ir $g(x) = \sqrt[19]{x}$:

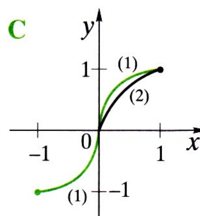


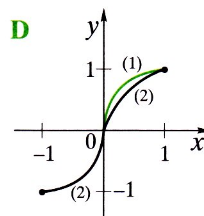
a) Kuris grafikas kurią funkciją atitinka?

b) Kaip atrodo tų funkcijų grafikai intervale $x \in [-1; 1]$? (Pasirinkite teisingą atsakymą.)

A


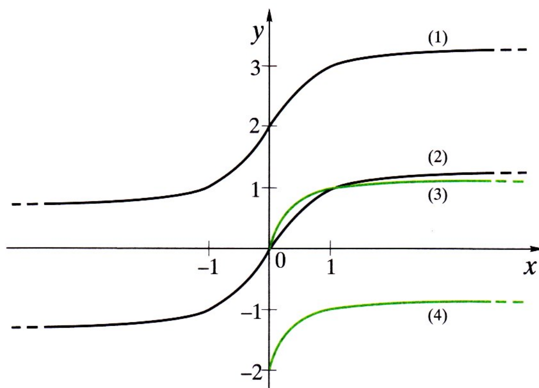
B


C


D


c) Koks ženklas (> , <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:
1) $f(x)$ ■ $g(x)$, kai $x \in (0; 1)$? 2) $f(x)$ ■ $g(x)$, kai $x \in (1; +\infty)$?

302. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti funkcijų $f(x) = \sqrt[7]{x}$, $g(x) = \sqrt[12]{x}$, $h(x) = \sqrt[7]{x} + 2$, $l(x) = \sqrt[12]{x} - 2$ grafikai:



Kuris grafikas kurią funkciją atitinka? (Pasirinkite teisingą atsakymą.)

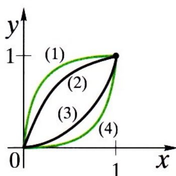
A (1) — $l(x)$
(2) — $g(x)$
(3) — $f(x)$
(4) — $h(x)$

B (1) — $f(x)$
(2) — $h(x)$
(3) — $l(x)$
(4) — $g(x)$

C (1) — $h(x)$
(2) — $f(x)$
(3) — $g(x)$
(4) — $l(x)$

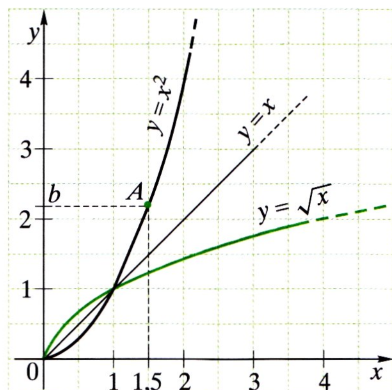
D (1) — $h(x)$
(2) — $g(x)$
(3) — $f(x)$
(4) — $l(x)$

303. Intervale $x \in [0; 1]$ nubraižyti grafikai funkcijų $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_4(x) = \sqrt[4]{x}$:



a) Kuris grafikas kurią funkciją atitinka?
b) Pratęskite tų funkcijų grafikus intervale $x \in [-2; 2]$.

304. Funkcijų $f(x) = x^{2n}$, kai $x \in [0; +\infty)$, ir $g(x) = \sqrt[2n]{x}$ ($n \in \boldsymbol{N}$) grafikai yra vienas kitam simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu. Pavyzdžiui:



Taškas $A(1{,}5; b)$ priklauso funkcijos $y = x^2$ grafikui.

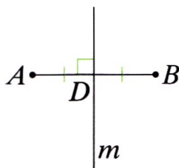
1) Su kuriuo grafiko $y = \sqrt{x}$ tašku B sutaps taškas A, perlenkus lapą per tiesę $y = x$?

   A $B(1{,}5; b)$ **B** $B(b; 1{,}5)$ **C** $B(1{,}5; 1{,}5)$ **D** $B(b; b)$

2) Kokios taškų A ir B koordinatės?
3) Kaip, naudojantis liniuote ir kampainiu, rasti tašką B?

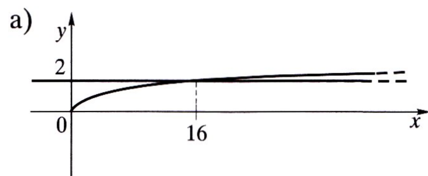


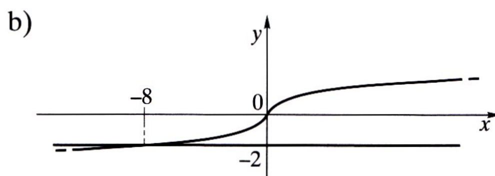
Taškai A ir B yra simetriški tiesės m atžvilgiu, jei $AB \perp m$ ir $AD = DB$ ($AB \cap m = D$).



4) Ar funkcijų $f(x) = x^{2n+1}$ ir $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ ($n \in \boldsymbol{N}$) grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu? Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus funkcijų $f(x) = x^3$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

305. Mokinys lygtį $\sqrt[n]{x} = a$ sprendė grafiškai, t. y. braižydamas grafikus $y = \sqrt[n]{x}$ ir $y = a$.

a) 

b) 

1) Koks mokinio spręstos lygties atsakymas?
2) Kokią lygtį sprendė mokinys?
3) Ar gali lygtis $\sqrt[2n]{x} = a$ ($n \in \boldsymbol{N}$) neturėti sprendinių?
4) Ar gali lygtis $\sqrt[2n+1]{x} = a$ ($n \in \boldsymbol{N}$) neturėti sprendinių?

6.4. Iracionaliosios lygtys

Lygtys su kvadratinėmis šaknimis

Šiame skyrelyje mokysimės spręsti lygtis, kai nežinomasis yra po kvadratinės šaknies ženklu, pavyzdžiui:

$$\sqrt{x-2}=2, \quad \sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}, \quad 2\sqrt{x+5}=x+2.$$

Tokias lygtis kartais pavyksta išspręsti remiantis kvadratinės šaknies apibrėžimu, o kartais tenka abi lygties puses kelti kvadratu, t. y. naikinti kvadratinę šaknį.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{x-2}=2.$$

Sprendimas. Vien pasižiūrėję į lygtį matome, kad ji turi sprendinį

$$x=6,$$

nes kvadratinė šaknis lygi 2, kai pošaknis lygus 4. O pošaknis $x-2$ lygus 4, kai $x=6$. Iš tikrųjų, kai

$$x=6, \quad \text{tai} \quad \sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2.$$

Išspręskime šią lygtį, abi jos puses keldami kvadratu — taip mes panaikinsime šaknį, nes $(\sqrt{a})^2=a$ $(a \geqslant 0)$:

$$\sqrt{x-2}=2 \mid \uparrow 2,$$
$$(\sqrt{x-2})^2=2^2,$$
$$x-2=4,$$
$$x=4+2,$$
$$x=6.$$

Atsakymas. $x=6$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{x-2}=-2.$$

Sprendimas. Pasižiūrėję į lygtį, iš karto galime pasakyti, kad ji sprendinių neturi, nes kvadratinė šaknis negali būti lygi neigiamajam skaičiui.

Pažiūrėkime, ką gautume, abi šios lygties puses pakėlę kvadratu:

$$\sqrt{x-2}=-2 \mid \uparrow 2, \quad (\sqrt{x-2})^2=(-2)^2, \quad x-2=4,$$
$$x=4+2,$$
$$x=6.$$

Patikriname:

$$\text{kai } x=6, \text{ tai } \sqrt{x-2}=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2 \neq -2.$$

Abi lygties puses pakėlus kvadratu, iš naujosios lygties rasta x reikšmė *nėra* pradinės lygties sprendinys. Taigi lygties abi puses keldami kvadratu ne visada gauname lygtį, ekvivalenčią pradinei.

Atsakymas. Lygtis sprendinių neturi.

Jei, spręsdami lygtį, abi jos puses kėlėte kvadratu, tai galėjote gauti nežinomojo reikšmes, kurios nėra lygties sprendiniai. Todėl būtinai patikrinkite, ar gautosios reikšmės yra lygties sprendiniai.

? Išspręskite lygtį $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$2 \cdot \sqrt{x+5} = x+2.$$

Sprendimas. Abi puses kelkime kvadratu:

$$2 \cdot \sqrt{x+5} = x+2 \mid \uparrow 2,$$
$$\left(2 \cdot \sqrt{x+5}\right)^2 = (x+2)^2,$$
$$2^2 \cdot \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = x^2 + 4x + 4,$$
$$4 \cdot (x+5) = x^2 + 4x + 4,$$
$$4x + 20 = x^2 + 4x + 4,$$
$$x^2 = 16,$$
$$x_1 = -4, x_2 = 4.$$

Įstatę gautas reikšmes į pradinę lygtį (o tai būtina daryti), įsitikiname, kad $x = -4$ nėra lygties sprendinys, o $x = 4$ yra sprendinys:

kai $x = -4$, tai $2 \cdot \sqrt{-4+5} \neq -4 + 2$;

kai $x = 4$, tai $2 \cdot \sqrt{4+5} = 4 + 2$.

Atsakymas. $x = 4$.

Lygtys su trečiojo laipsnio šaknimis

Dabar panagrinėkime pavyzdžius lygčių, kurių nežinomasis (arba reiškinys su nežinomuoju) yra po trečiojo laipsnio šaknimi.
Tokių lygčių pavyzdžiai:

$$\sqrt[3]{x} = 2, \quad \sqrt[3]{2x-1} = -1, \quad \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{2x-1}.$$

Šias lygtis galima spręsti remiantis trečiojo laipsnio šaknies apibrėžimu arba abi lygties puses keliant trečiuoju laipsniu.

4 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sqrt[3]{x} = 2$.

Sprendimas. Iš karto matome, kad šios lygties sprendinys yra $x = 8$, nes $\sqrt[3]{8} = 2$. Lygtį galima spręsti abi jos puses keliant trečiuoju laipsniu, t. y. naikinant trečiojo laipsnio šaknį:

$$\sqrt[3]{x} = 2 \mid \uparrow 3,$$
$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 2^3,$$
$$x = 8.$$

Atsakymas. $x = 8$.

5 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$\sqrt[3]{2x-1} = -1.$$

Sprendimas. Pakėlę abi lygties puses trečiuoju laipsniu, turime:

$$\sqrt[3]{2x-1} = -1 \mid \uparrow 3,$$

$$\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 = (-1)^3,$$

$$2x - 1 = -1,$$

$$2x = 0,$$

$$x = 0.$$

Patikrinimas:

kai $x = 0$, tai $\sqrt[3]{2 \cdot 0 - 1} = \sqrt[3]{-1} = -1.$

Atsakymas. $x = 0$.

? Išspręskite lygtį $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{2x-1}$. Kaip manote, ar lygties abi puses keldami kubu (trečiuoju laipsniu) visada gauname lygtį, ekvivalenčią pradinei?

Lygtis, kurios nežinomasis yra po šaknies ženklu, vadinama iracionaliąja lygtimi.

Pratimai ir uždaviniai

306. Išspręskite lygtis.

a) $\sqrt{x} = 1$; $\sqrt{x} = -1$; $\sqrt{x} = 0$;

b) $\sqrt[3]{x} = 1$; $\sqrt[3]{x} = -1$; $\sqrt[3]{x} = 0$;

c) $\sqrt[4]{x} = 1$; $\sqrt[4]{x} = -1$; $\sqrt[4]{x} = 0$;

d) $\sqrt[5]{x} = 1$; $\sqrt[5]{x} = -1$; $\sqrt[5]{x} = 0$.

307. Išspręskite lygtis.

a) $\sqrt{x+1} = 2$; $\sqrt{x+1} = -2$; $\sqrt{x+1} = 0$;

b) $\sqrt{5x-3} = 3$; $\sqrt{5x-3} = -3$; $\sqrt{5x-3} = 0$;

c) $\sqrt{x^2-1} = 5$; $\sqrt{x^2-2x} = 5$; $\sqrt{x^2-2x+26-3} = 5$;

d) $2\sqrt{x+4} - 6 = 0$; $-3\sqrt{4-x} - 5 = 0$; $7\sqrt{4x^2-5x+10} + 20 = 0$.

308. Išspręskite lygtis.

a) $\sqrt[3]{x+1} = 2$; $\sqrt[3]{x+1} = -2$; $\sqrt[3]{x+1} = 0$;

b) $\sqrt[3]{2x+15} = 3$; $\sqrt[3]{4-x} = -3$; $-\sqrt[3]{x^2} = -1$.

309. Išspręskite lygtį.

a) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$;

b) $\sqrt{3x-5} = \sqrt{5-2x}$;

c) $\sqrt{2-x} = \sqrt{x-2}$;

d) $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2x}$;

e) $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{3x^2-2}$;

f) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2}$;

g) $\sqrt{5x} - \sqrt{4x-4} = 0$.

310. Išspręskite lygtį.

a) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{3x+9}$;

b) $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{2x-1}$;

c) $\sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{3x+9}$;

d) $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{2x-1}$.

311. Išspręskite lygtį.

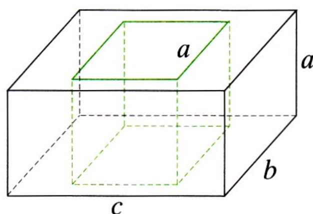
a) $\sqrt{-x+6} = x$; b) $\sqrt{x^2+1} = x-1$; c) $2\sqrt{3x^2-4} = 2x+5$.

6.5. Geometrijos uždaviniai

312. a) Kubo briauna lygi a.
1) Kam lygi visų kubo briaunų ilgių suma?
2) Kam lygus kubo vienos sienos plotas?
3) Kam lygus kubo viso paviršiaus plotas?
4) Kam lygus kubo tūris?
5) Atsakykite į 1)–4) klausimus, jei $a = 2\,\text{cm}$.

b) Stačiakam̃pio gretãsienio briaunos lygios a, b ir c.
1) Kam lygi visų stačiakampio gretasienio briaunų ilgių suma?
2) Kokie stačiakampio gretasienio sienų plotai?
3) Kam lygus stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotas?
4) Kam lygus stačiakampio gretasienio tūris?
5) Atsakykite į 1)–4) klausimus, jei $a = 2\,\text{cm}$, $b = 2{,}5\,\text{cm}$, $c = 30\,\text{mm}$.

c) Stačiakam̃pyje gretãsienyje, kurio matmenys centimetrais yra $a \times b \times c$, išpjauta kubo formos skylė. Kubo briauna lygi a centimetrų.

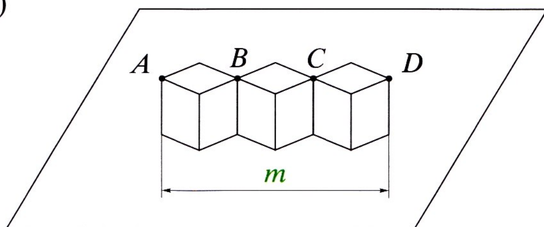


1) Kam lygus gauto kūno tūris?
2) Kam lygus gauto kūno viso paviršiaus plotas?
3) Kiek reikės dažų gautam kūnui nudažyti, jei $1\,\text{cm}^2$ nudažyti reikia 2 g dažų?
4) Atsakykite į 1)–3) klausimus, jei $a = 2\,\text{cm}$, $b = 2{,}5\,\text{cm}$, $c = 30\,\text{mm}$.

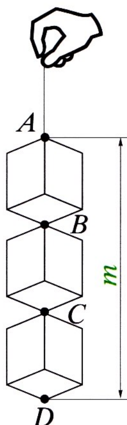
313. Kubo viso paviršiaus plotas yra:
a) $150\,\text{cm}^2$; b) $30\,\text{cm}^2$.
Raskite:
1) kubo briaunos ilgį;
2) kubo tūrį;
3) kubo sienos įstrižainės ilgį;
4) kubo įstrižainės ilgį.

314. Koks pavaizduotos figūros ilgis m, jei ji sukonstruota iš vienodų kubelių, kurių kiekvieno briauna lygi 1 cm (taškai A, B, C ir D yra vienoje tiesėje)?

a)



b)



315. Akvariumas yra stačiakampio gretasienio formos. Akvariumo pagrindo plotis yra 40 cm, o ilgis — 1 m.

1) Raskite akvariumo aukštį, jei į jį telpa $0{,}2\,\text{m}^3$ vandens.
2) Į akvariumą įpilta 150 litrų vandens. Koks vandens aukštis akvariume?

 $1\,\ell = 1\,\text{dm}^3$.

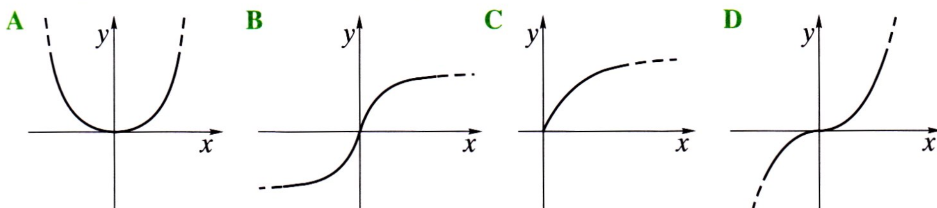
---

316. a) Kubo briauna lygi a. Kubo briauną pailginame dvigubai. Kam lygus naujojo ir pradinio kubų tūrių santykis? Kam bus lygus tas santykis kubo briauną pailginus trigubai; keturgubai; n kartų?

b) Stačiakampio gretasienio briaunos lygios a, b ir c. Jo briaunas pailginame dvigubai. Kam lygus naujojo ir pradinio stačiakampių gretasienių tūrių santykis? Kam bus lygus tas santykis, jei briaunas pailginsime n kartų?

6.6. Pasitikrinkime

317. Nubraižyti funkcijų $f(x) = x^5$, $g(x) = x^6$, $h(x) = \sqrt[5]{x}$, $l(x) = \sqrt[6]{x}$ grafikai. Kuris grafikas atitinka kurią funkciją?



318. Duotos funkcijos $f(x) = x^{10}$, $g(x) = x^{11}$, $h(x) = \sqrt[10]{x}$, $l(x) = \sqrt[11]{x}$.

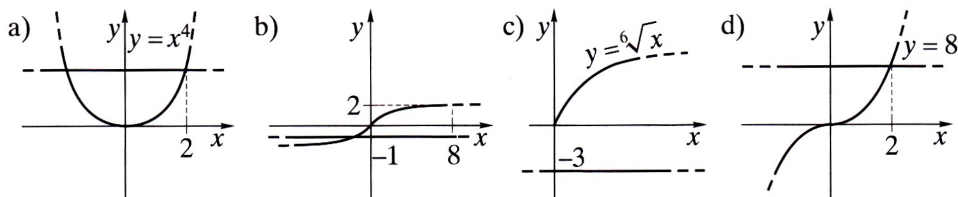
a) Nustatykite tų funkcijų:
   1) apibrėžimo ir reikšmių sritis;
   2) reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus;
   3) intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės didesnės už 0; mažesnės už 0;
   4) lyginumą.

b) Išdėstykite:
   1) didėjimo tvarka $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$, $l(2)$;
   2) mažėjimo tvarka $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)$, $l\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Išspręskite lygtis.
   1) $x^{10} = 1$, $x^{11} = 1$, $\sqrt[10]{x} = 1$, $\sqrt[11]{x} = 1$;
   2) $x^{10} = -1$, $x^{11} = -1$, $\sqrt[10]{x} = -1$, $\sqrt[11]{x} = -1$;
   3) $x^{10} = 1024$, $x^{11} = 2048$, $\sqrt[10]{x} = -2$, $\sqrt[11]{x} = -2$;
   4) $x^{10} = 2$, $x^{11} = 2$;
   5) $f(x) = 0$, $g(2) = f(x)$, $f(x) - g(x) = 0$.

319. Išspręskite lygtį.
a) $2x^4 = 32$; b) $3x^5 - 3072 = 0$; c) $(x - 5)^4 = 256$; d) $(x^2 + 1)^3 = 27$.

320. Mokinys grafiškai sprendė lygtį:



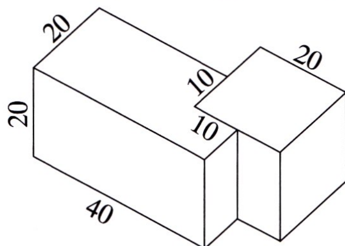
1) Koks mokinio spręstos lygties atsakymas?
2) Kokią lygtį sprendė mokinys?

321. Išspręskite iracionaliąją lygtį.

a) $\sqrt{2x+5}=2$; b) $\sqrt{-x^2+7}=-2$; c) $\sqrt{x^2-4}=0$;

d) $\sqrt{5x}=x$; e) $\sqrt{1-x^2}=x-1$; f) $\sqrt[3]{3-2x}=\sqrt[3]{x^2}$.

322. Tekintojas turėjo du metalinius ruošinius. Vienas jų buvo stačiakampio gretasienio formos, kitas — kubo formos. Iš tų ruošinių jis pagamino tokią detalę (matmenys brėžinyje nurodyti centimetrais):



1) Koks pagamintos detalės viso paviršiaus plotas?
2) Kiek litrų vandens išsilietų, įmetus šią detalę į pilną vandens statinę?

323. Kubo tūris lygus V. Kiek kartų reikia pailginti kubo briauną, kad jo tūris būtų: 1) $125V$? 2) $1000V$? 3) $n \cdot V$?

Šachmatų lenta

Įsivaizduokime, kad šachmatų lentos (8×8) kiekviename langelyje padėti centai tokia tvarka:

pirmame langelyje — 1 centas,
antrame langelyje — 2 centai,
trečiame langelyje — 4 centai,
ketvirtame langelyje — 8 centai,
....

O kiek centų padėta paskutiniame langelyje?
Laipsniu atsakymą parašyti nesunku:

šešiasdešimt ketvirtame langelyje padėta 2^{63} centai.

Beje šis skaičius užrašytas įprastiniu pavidalu, gali gerokai nustebinti:

$2^{63} = 922\,372\,036\,854\,775\,808.$

O dabar pasvarstykite, kur centų daugiau — paskutiniame langelyje ar likusiuose 63-juose langeliuose.

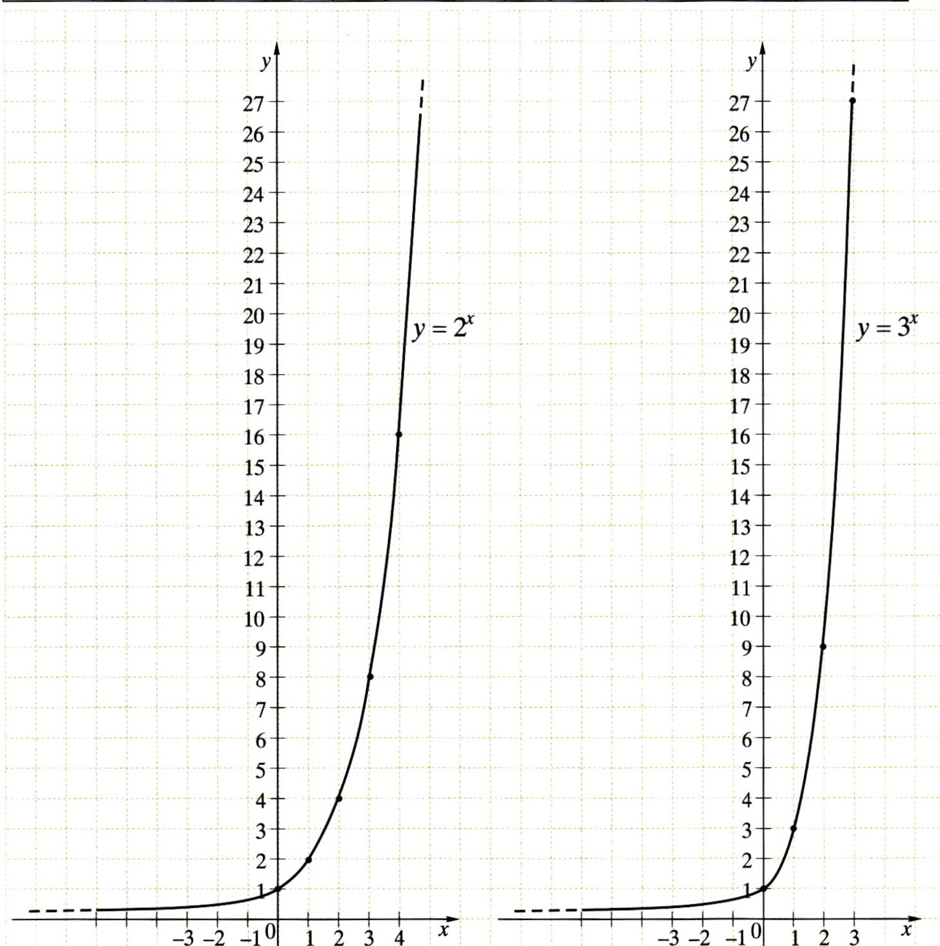
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}

7 RODIKLINĖ FUNKCIJA

Funkcija $f(x) = a^x, a > 1$

1 užduotis. Panagrinėję funkcijų $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ grafikus, atsakykite į klausimus.

$x =$	...	-3	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...	3	...
$2^x =$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		8	
$3^x =$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		1		3		9		27	

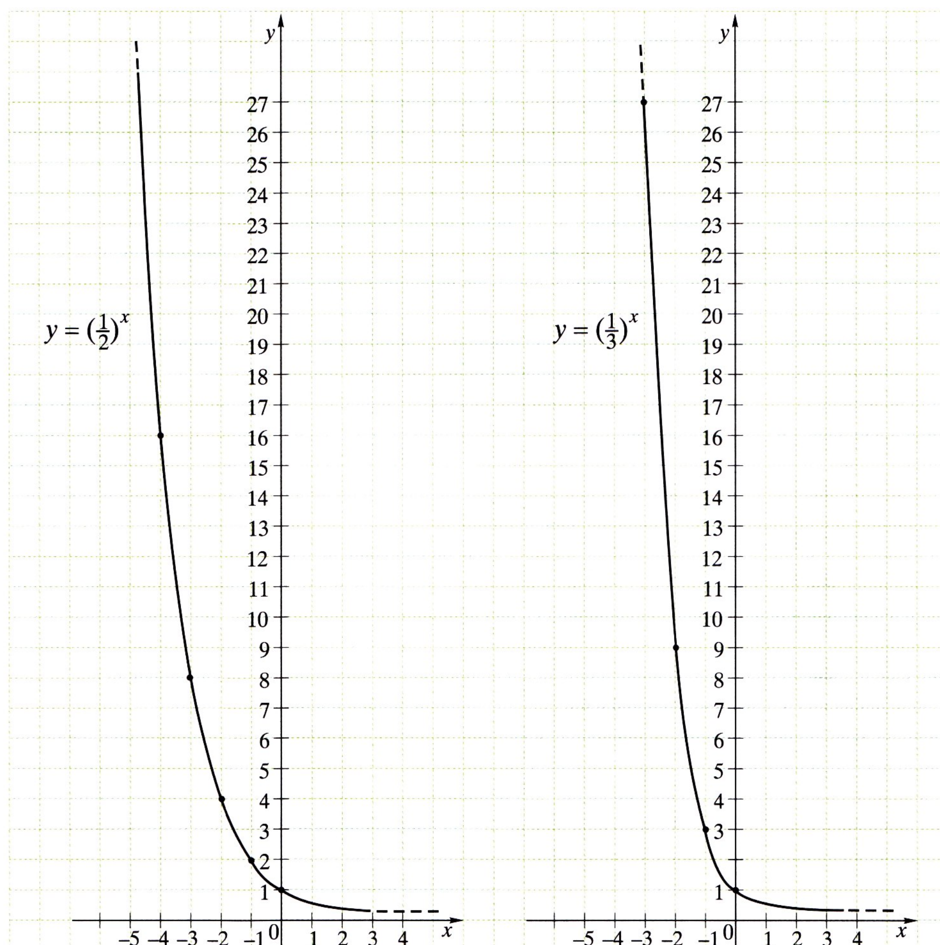


1) Kokios funkcijų $f_1(x) = 2^x$ ir $f_2(x) = 3^x$ apibrėžimo ir reikšmių sritys?
2) Koks taškas priklauso abiejų funkcijų grafikams?
3) Kokios yra tos funkcijos — didėjančiosios ar mažėjančiosios?
4) Kaip keičiasi y reikšmės, kai x reikšmės mažėdamos artėja į $-\infty$? Ar grafikas kirs x ašį?

Funkcija $f(x) = a^x, 0 < a < 1$

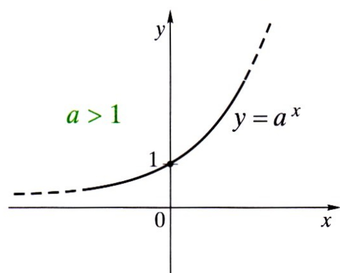
2 užduotis. Panagrinėję funkcijų $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafikus, atsakykite į klausimus.

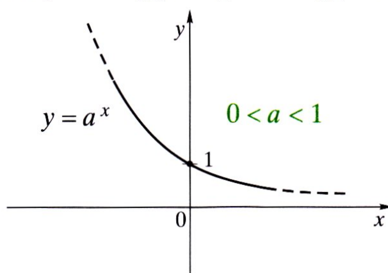
$x =$	...	-3	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...	3	...
$\left(\frac{1}{2}\right)^x =$		8		4		2		1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$	
$\left(\frac{1}{3}\right)^x =$		27		9		3		1		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{27}$	



1) Kokios funkcijų $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ir $g_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ apibrėžimo ir reikšmių sritys?
2) Koks taškas priklauso abiejų funkcijų grafikams?
3) Kokios yra tos funkcijos — didėjančiosios ar mažėjančiosios?
4) Kaip keičiasi y reikšmės, kai x reikšmės didėdamos artėja į $+\infty$? Ar grafikas kirs x ašį?

Laipsnį a^x ir funkciją $f(x) = a^x$ galima apibrėžti su visais teigiamais skaičiais a. Kai $a > 1$, funkcijos $f(x) = a^x$ grafikas panašus į funkcijų $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ grafikus, kai $0 < a < 1$ — panašus į funkcijų $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafikus.





Funkcija $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) vadinama rodikline funkcija.

Pratimai ir uždaviniai

324. 1) Dideliame milimetrinio popieriaus lape vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus funkcijų $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = 3^x$.

2) Remdamiesi grafikais, nustatykite, kokie ženklai ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašyti vietoj kvadratėlių.

a) $2^{\frac{1}{2}} \blacksquare 3^{\frac{1}{2}}$, $2^{3\frac{1}{2}} \blacksquare 3^{3\frac{1}{2}}$;

b) $2^{-\frac{1}{2}} \blacksquare 3^{-\frac{1}{2}}$, $2^{-3\frac{1}{2}} \blacksquare 3^{-3\frac{1}{2}}$;

c) $2^x \blacksquare 3^x$, kai $x \in (0; +\infty)$;

d) $2^x \blacksquare 3^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;

e) $2^x \blacksquare 3^x$, kai $x = 0$.

3) Išdėstykite didėjimo tvarka.

a) 2^5, 2^{15}, 2^{-8}, 2^{-3}, 2^0, 2^8, $2^{-\frac{1}{2}}$, $2^{3\frac{1}{2}}$;

b) 3^{-15}, 3^{-14}, 3^{10}, 3^9, $3^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$, $3^{-\frac{1}{2}}$, $3^{-\frac{1}{3}}$.

4) Apskaičiuokite, o atsakymą parašykite dešimtainiu skaičiumi 0,1 tikslumu.

a) $f(-4)$, $f(5)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$;

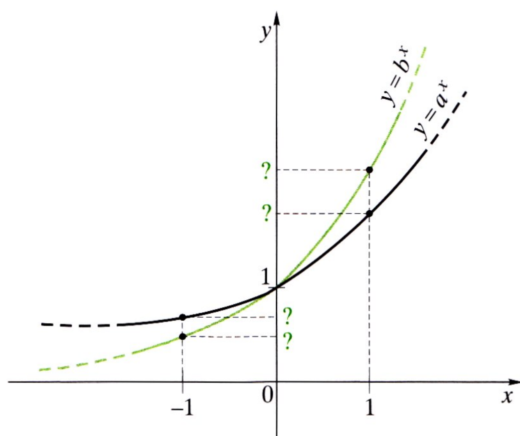
b) $g(-4)$, $g(5)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, $g\left(\frac{5}{2}\right)$;

c) $f(\sqrt{2})$, $g(\sqrt{2})$.



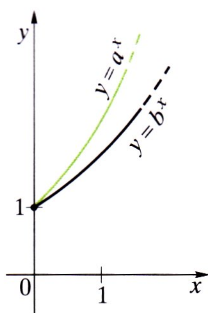
Kai laipsnio a^x rodiklis yra:
1) natūralusis skaičius n ($n \in \boldsymbol{N}$), tai:
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kartų}}$, pvz., $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;
2) neigiamasis sveikasis skaičius $-n$ ($n \in \boldsymbol{N}$), tai:
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, pvz., $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;
3) lygus 0, tai:
$a^0 = 1$, pvz., $2^0 = 1$;
4) racionalusis skaičius $\frac{m}{n}$ ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$), tai:
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, pvz., $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$.
Laipsnio su racionaliuoju rodikliu reikšmės dažniausiai tiksliai apskaičiuoti negalime, pvz.:
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}141$; $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$.
Tuo labiau negalime tiksliai apskaičiuoti laipsnio a^x reikšmės, kai x iracionalus. Tačiau galime skaičiuoti apytiksliai. Pavyzdžiui, $2^{\sqrt{3}}$ reikšmė yra tarp 2^1 ir 2^2, nes $1 < \sqrt{3} < 2$, t. y. $2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$, $2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$.
Aišku, galima rasti tikslesnes $2^{\sqrt{3}}$ reikšmes. Kadangi $\sqrt{3} = 1{,}73...$, tai
$1 < 1{,}7 < 1{,}73 < \cdots < \sqrt{3} < \cdots < 1{,}74 < 1{,}8 < 2$.
Vadinasi,
$2^1 < 2^{1{,}7} < 2^{1{,}73} < \cdots < 2^{\sqrt{3}} < \cdots < 2^{1{,}74} < 2^{1{,}8} < 2^2$.

325. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti rodiklinių funkcijų $f(x) = a^x$ ir $g(x) = b^x$ ($a > 1$, $b > 1$) grafikai:



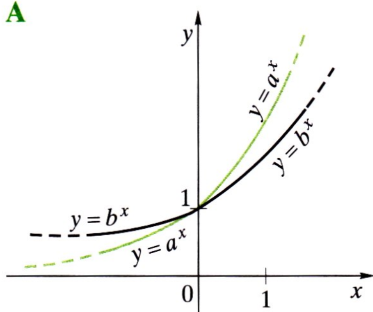
1) Kuris skaičius didesnis: a ar b?
2) Kas turėtų būti parašyta y ašyje vietoj klaustukų?

326. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti funkcijų $f(x) = a^x$, $a > 1$, ir $g(x) = b^x$, $b > 1$, kai $x \in [0; +\infty)$, grafikai:

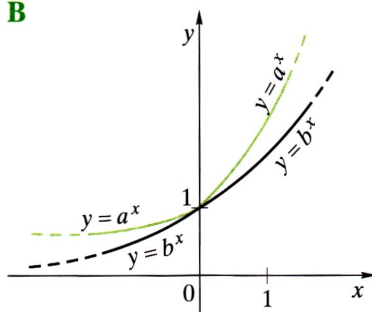


1) Funkcijų $f(x) = a^x$ ir $g(x) = b^x$ grafikai, kai $x \in (-\infty; +\infty)$, yra paveikslėlyje (pasirinkite teisingą paveikslėlį):

A



B



2) Kokie ženklai ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašyti vietoj kvadratėlių.

a) $a \blacksquare b$;

b) $a^3 \blacksquare b^3$, $a^4 \blacksquare b^4$, $a^{100} \blacksquare b^{100}$;

c) $a^{-3} \blacksquare b^{-3}$, $a^{-4} \blacksquare b^{-4}$, $a^{-100} \blacksquare b^{-100}$;

d) $a^x \blacksquare b^x$, kai $x \in (0; +\infty)$;

e) $a^x \blacksquare b^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;

f) $a^x \blacksquare b^x$, kai $x = 0$?

3) Išdėstykite didėjimo tvarka.

a) a^{-100}, a^{-99}, a^{100}, a^{99}, $a^{-\frac{2}{3}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$;

b) b^{-15}, b^{-4}, b^{15}, b^0, b^{-16}, b^{16}, $b^{\sqrt{3}}$, $b^{\sqrt{5}}$, $b^{-\sqrt{3}}$, $b^{-\sqrt{5}}$.

327. 1) Dideliame milimetrinio popieriaus lape vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafikus.

2) Remdamiesi grafikais, nustatykite, kokie ženklai ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašyti vietoj kvadratėlių.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\frac{1}{2}} \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^{3\frac{1}{2}}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3\frac{1}{2}} \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^{-3\frac{1}{2}}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^x$, kai $x \in (0; +\infty)$;

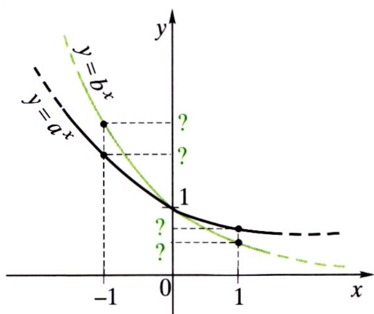
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^x$, kai $x = 0$.

3) Išdėstykite didėjimo tvarka.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\frac{1}{2}}$;

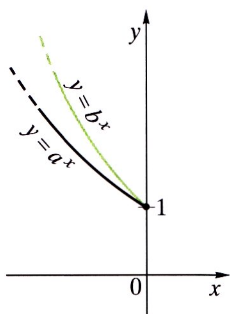
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-15}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-14}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^9$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{13}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

328. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti rodiklinių funkcijų $f(x) = a^x$ ir $g(x) = b^x$ $(0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$ grafikai:



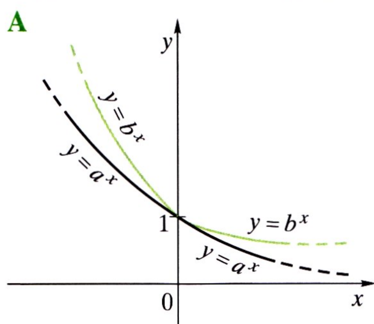
1) Kuris skaičius didesnis: a ar b?
2) Kas turėtų būti parašyta y ašyje vietoj klaustukų?

329. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti funkcijų $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$, ir $g(x) = b^x$, $0 < b < 1$, kai $x \in (-\infty; 0]$, grafikai:

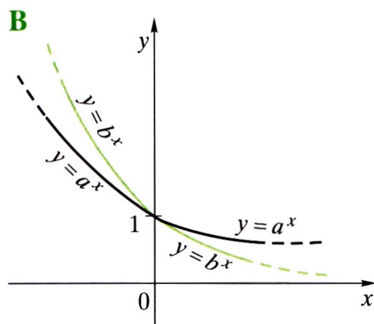


1) Funkcijų $f(x) = a^x$ ir $g(x) = b^x$ grafikai, kai $x \in (-\infty; +\infty)$, yra paveikslėlyje (pasirinkite teisingą paveikslėlį):

A



B



2) Kokie ženklai ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašyti vietoj kvadratėlių.

a) $a \blacksquare b$;

b) $a^3 \blacksquare b^3$, $a^4 \blacksquare b^4$, $a^{100} \blacksquare b^{100}$;

c) $a^{-3} \blacksquare b^{-3}$, $a^{-4} \blacksquare b^{-4}$, $a^{-100} \blacksquare b^{-100}$;

d) $a^x \blacksquare b^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$;

e) $a^x \blacksquare b^x$, kai $x \in (0; +\infty)$;

f) $a^x \blacksquare b^x$, kai $x = 0$?

3) Išdėstykite didėjimo tvarka:

a) a^{-100}, a^{-99}, a^{100}, a^{99}, $a^{-\frac{2}{3}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$;

b) b^{-15}, b^{-4}, b^{15}, b^{0}, b^{-16}, b^{16}, $b^{\sqrt{3}}$, $b^{\sqrt{5}}$, $b^{-\sqrt{3}}$, $b^{-\sqrt{5}}$.

330. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus funkcijų:

a) $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; b) $f(x) = 3^x$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2) Apskaičiuokite:

$f(-4)$ ir $g(4)$; $f(4)$ ir $g(-4)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ir $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ir $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

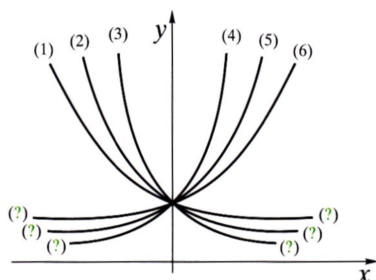
3) Koks ženklas ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:

$f(x) \blacksquare g(-x)$; $f(-x) \blacksquare g(x)$?

4) Kokie vienas kito atžvilgiu yra grafikai funkcijų:

a) $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$? b) $f(x) = 3^x$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

331. Brėžinyje pavaizduota rodiklinių funkcijų grafikų „puokštė“:



(1): $y = a^x$
(2): $y = b^x$
(3): $y = c^x$
(4): $y = d^x$
(5): $y = e^x$
(6): $y = f^x$

a) Išdėstykite rodiklinių funkcijų pagrindus (a, b, c, d, e ir f) didėjimo tvarka.

b) Nustatykite, kuris grafikas kurią funkciją atitinka ir pasakykite, kas (1, 2, 3, 4, 5, 6) turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.

7.2. Rodiklinės lygtys

Šiame skyrelyje spręsime lygtis, kai nežinomasis yra laipsnio rodiklyje.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį:

$$\text{a) } 3^x = 9; \quad \text{b) } 7^{x-5} = 49; \quad \text{c) } 4^{x^2+2x+1} = 1.$$

Šių lygčių sprendinius galima nesunkiai nustatyti remiantis laipsnio apibrėžimu.

a) Lygties

$$3^x = 9$$

sprendinys yra

$$x = 2,$$

nes $3^2 = 9$.

b) Lygties

$$7^{x-5} = 49$$

sprendinys yra ta x reikšmė, su kuria

$$x - 5 = 2,$$

nes $7^2 = 49$.

Išsprendę lygtį $x - 5 = 2$, gauname

$$x = 7.$$

c) Lygties

$$4^{x^2+2x+1} = 1$$

sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

nes $4^0 = 1$. Išsprendę kvadratinę lygtį, gauname

$$x = -1.$$

Atsakymas. a) 2; b) 7; c) -1.

Dažnai rodiklines lygtis patogu būna spręsti suteikiant joms pavidalą

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$

Kadangi laipsniai su vienodais pagrindais, kai $a \neq 1$, yra lygūs tik tada, kai jų rodikliai lygūs, tai lygties $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$2^{x-1} = \frac{1}{16}.$$

Kairioji lygties pusė yra laipsnis, kurio pagrindas 2. Dešinę lygties pusę parašykime laipsniu, kurio pagrindas būtų 2:

$$\frac{1}{16} = 2^{-4}.$$

Reikia rasti tas x reikšmes, su kuriomis teisinga lygybė:

$$2^{x-1} = 2^{-4}.$$

Ši lygybė teisinga tik kai laipsnių rodikliai lygūs, t. y.

$$x - 1 = -4,$$
$$x = -3.$$

Iš tikrųjų, $x = -3$ yra lygties sprendinys, nes

$$2^{-3-1} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Atsakymas. $x = -3$.

Pratimai ir uždaviniai

332. Išspręskite lygtis.

a) $2^x = 128$,
$2^{x+1} = 64$,
$2^{x-5} = 8$,
$2^{x^2} = 16$;

b) $2^x = 1$,
$2^{x-5} = 1$,
$2^{2x-\sqrt{3}} = 1$,
$2^{x^2-2x+1} = 1$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = \frac{1}{64}$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}$;

d) $3^x = \frac{1}{9}$,
$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$,
$7^{x+2} = \frac{1}{7}$,
$100^{x+2} = \frac{1}{10}$;

e) $4^x = 8$,
$9^x = \frac{1}{27}$,
$25^{-x} = \frac{1}{125}$.



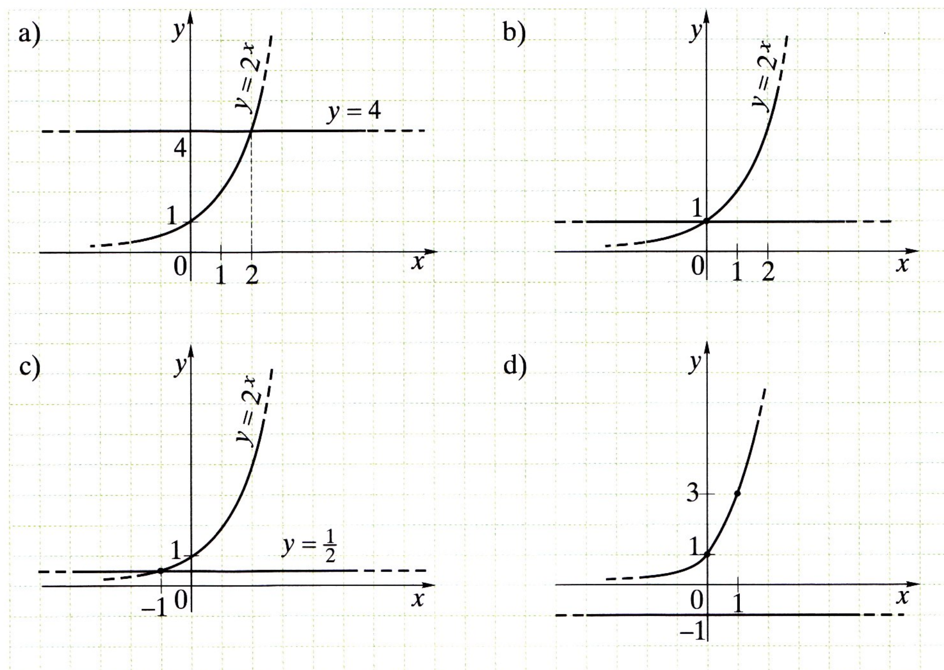
1) $a^0 = 1$; 2) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

333. Rodiklinės lygties

$a^x = b$

sprendiniai buvo pavaizduoti grafiškai.

1) Remdamiesi grafiku, raskite lygties $a^x = b$ sprendinius.
2) Nustatykite, kokia tai lygtis.
3) Lygtį išspręskite algebriškai.



4) Paaiškinkite, ar gali rodiklinė lygtis $a^x = b$ $(a > 0)$ neturėti sprendinių.

334. Grafiškai pavaizduokite lygties sprendinius.

a) $3^x = 9$;
b) $3^x = \frac{1}{3}$;
c) $3^x = 1$;
d) $3^x = -3$;
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$;
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$;
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$;
h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$.

335. Naudodamiesi logaritmo ženklu užrašykite lygties sprendinį.

a) $2^x = 5$;
b) $2^x = 7$;
c) $3^x = 8$;
d) $5^x = 10$;
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$;
f) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 2$.



$\log_2 8 = 3$, nes $2^3 = 8$.

336. Kas turėtų būti parašyta vietoj kvadratėlių:

a) $2^x = 7$,
$2^x = 2^{\log_2 7}$,
$x = \blacksquare$?

b) $3^x = 10$,
$3^x = 3^{\blacksquare}$,
$x = \log_3 10$?

c) $5^{x+1} = 2$,
$5^{x+1} = 5^{\blacksquare}$,
$x + 1 = \blacksquare$,
$x = \blacksquare$?

d) $10^{x^2} = 100$,
$10^{x^2} = 10^{\blacksquare}$,
$x^2 = \blacksquare$,
$x_1 = \blacksquare$, $x_2 = \blacksquare$?

Kiekvienu atveju pasakykite lygčių sprendinius.



Teisinga tokia lygybė (ji vadinama *pagrindine logaritmine tapatybe*):
$a^{\log_a b} = b$, pvz., $2^{\log_2 3} = 3$.

337. Išspręskite lygtį.

a) $2^{3x-10} = 2^{2-6x}$; b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-12} = \left(\frac{1}{7}\right)^{15-2x}$; c) $3^{4x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-3}$;

d) $4^{3x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2x-5}$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2}$; f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+7} = \left(\frac{25}{4}\right)^{x^2}$.

338. Išspręskite lygtį, įsivedę naują nežinomąjį.

a) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$; b) $25^x - 130 \cdot 5^x + 625 = 0$;

c) $4^{x+1} + 4^x = 320$; d) $7^{x+2} - 7^{x-1} = 342$.



Kai kurias rodiklines lygtis galima spręsti įvedant naują nežinomąjį, pavyzdžiui,
$4^x + 2^x - 6 = 0$.
Pastebėkime, kad $4^x = (2^x)^2$. Pažymėję
$y = 2^x$,
iš rodiklinės lygties
$(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$
gauname kvadratinę lygtį:
$y^2 + y - 6 = 0$.
Ji turi du sprendinius
$y_1 = -3$, $y_2 = 2$.
Pradinės lygties sprendinius rasime iš rodiklinių lygčių:
$2^x = -3$ ir $2^x = 2$.
Pirmoji lygtis sprendinių neturi, o antrosios sprendinys $x = 1$.
Atsakymas. $x = 1$.

7.3. Rodiklinės nelygybės

Panagrinėkime nelygybes, kurių nežinomasis yra laipsnio rodiklyje. Imkime dvi rodiklines nelygybes:

$$2^x > 8 \quad \text{ir} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}.$$

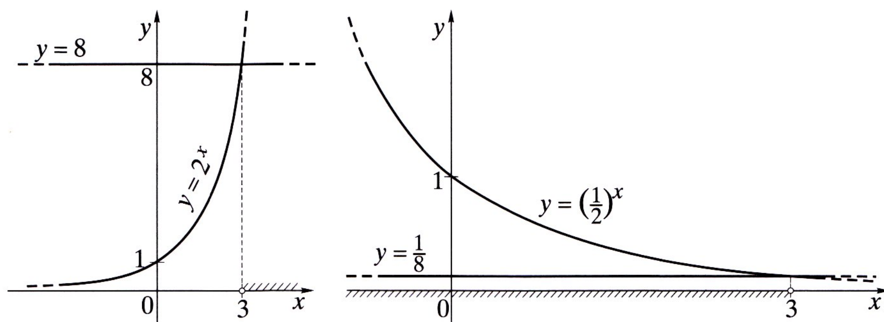
Pirmosios nelygybės laipsnio pagrindas didesnis už 1, o antrosios — mažesnis už 1. Šios nelygybės ekvivalenčios nelygybėms:

$$2^x > 2^3 \quad \text{ir} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Akivaizdu, kad šių nelygybių sprendiniai yra:

$$x > 3 \quad \text{ir} \quad x < 3.$$

Pavaizduokime šių nelygybių sprendinius grafiškai:



$y = 2^x$ aukščiau už $y = 8$, kai $x \in (3; +\infty)$

$y = (\frac{1}{2})^x$ aukščiau už $y = \frac{1}{8}$, kai $x \in (-\infty; 3)$

> Sprendžiant rodiklinę nelygybę, galima vadovautis tokiu algoritmu:
>
> 1. Suteikiame nelygybei pavidalą
> $$a^{f(x)} > a^{g(x)}.$$
> 2. Žiūrime, ar laipsnio pagrindas a yra didesnis už 1, ar yra mažesnis už 1.
>   - jei $a > 1$, tai sprendžiame nelygybę
> $$f(x) > g(x);$$
>   - jei $a < 1$, tai sprendžiame nelygybę
> $$f(x) < g(x).$$

Pastaba. Jei turime negriežtą nelygybę

$$a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)},$$

tai ši nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$f(x) \geqslant g(x), \quad \text{kai } a > 1;$$
$$f(x) \leqslant g(x), \quad \text{kai } a < 1.$$

Pratimai ir uždaviniai

339. Išspręskite rodiklinę nelygybę.

a) $3^x > 27$; b) $4^x \geqslant 16$; c) $4^x \leqslant 1$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant \frac{1}{27}$; e) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant \frac{1}{16}$; f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 1$.

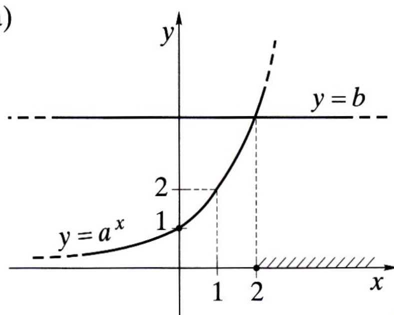
340. Išspręskite nelygybę.

a) $2^{3-x} > 2^{5+x}$; b) $(0{,}3)^{2+5x} \leqslant (0{,}3)^{2x-3}$;

c) $5^{x^2} > 5^x$; d) $\left(\frac{1}{10}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{10}\right)^{x^2-4}$.

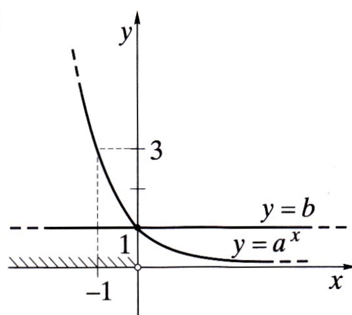
341. Nelygybė pavidalo $a^x \bullet b$ (čia $\bullet$ žymi vieną iš ženklų $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$; a, b — skaičiai) buvo sprendžiama grafiškai:

a)



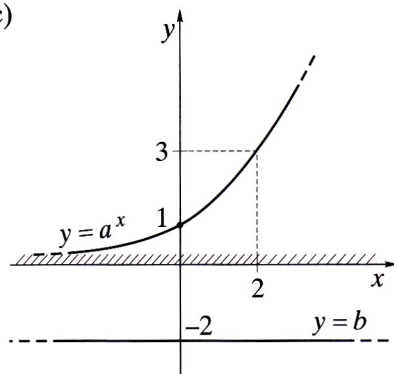
Atsakymas. $x \in [2; +\infty)$

b)



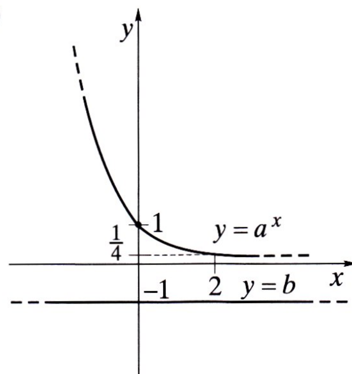
Atsakymas. $x \in (-\infty; 0)$

c)



Atsakymas. $x \in (-\infty; +\infty)$

d)



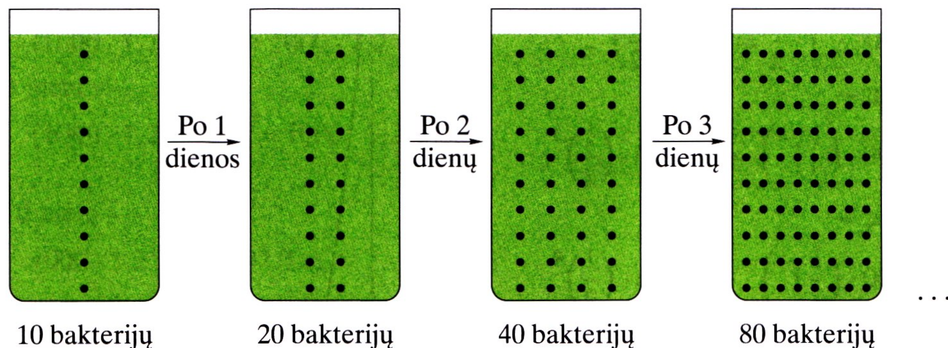
Atsakymas. $\varnothing$

Kokia nelygybė buvo sprendžiama?

7.4. Rodiklinis kitimas

Šiame skyrelyje nagrinėsime situacijas, kai dydis per kiekvieną laiko vienetą padidėja (sumažėja) po tiek pat kartų.

1 PAVYZDYS. Mėgintuvėlyje iš pradžių buvo 10 bakterijų. Kas dieną jų skaičius padvigubėja.
Panagrinėkime, kaip kinta bakterijų skaičius mėgintuvėlyje.



Po 1 dienos mėgintuvėlyje bus

$$10 \cdot 2,$$

po 2 dienų —

$$(10 \cdot 2) \cdot 2 = 10 \cdot 2^2,$$

po 3 dienų —

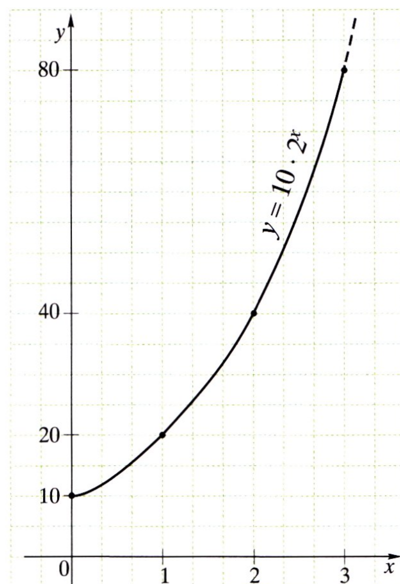
$$(10 \cdot 2^2) \cdot 2 = 10 \cdot 2^3,$$

....

po x dienų —

$$(10 \cdot 2^{x-1}) \cdot 2 = 10 \cdot 2^x$$

bakterijų.



Mėgintuvėlio bakterijų skaičių y po x dienų galima apskaičiuoti remiantis formule

$$y = 10 \cdot 2^x.$$

Apskritai, jei dydis a per tam tikrą laiko tarpsnį *padidėja* k kartų, tai po x tarpsnių dydžio a reikšmė y bus

$$y = a \cdot k^x$$

2 PAVYZDYS. Mėgintuvėlyje iš pradžių buvo 800 bakterijų. Kas dieną jų skaičius sumažėja dvigubai. Kiek bakterijų mėgintuvėlyje bus po 5 dienų?

Po 1 dienos mėgintuvėlyje bus

$$800 \cdot \frac{1}{2},$$

po 2 dienų —

$$\left(800 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

po 3 dienų —

$$\left(800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

po 4 dienų —

$$\left(800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

po 5 dienų —

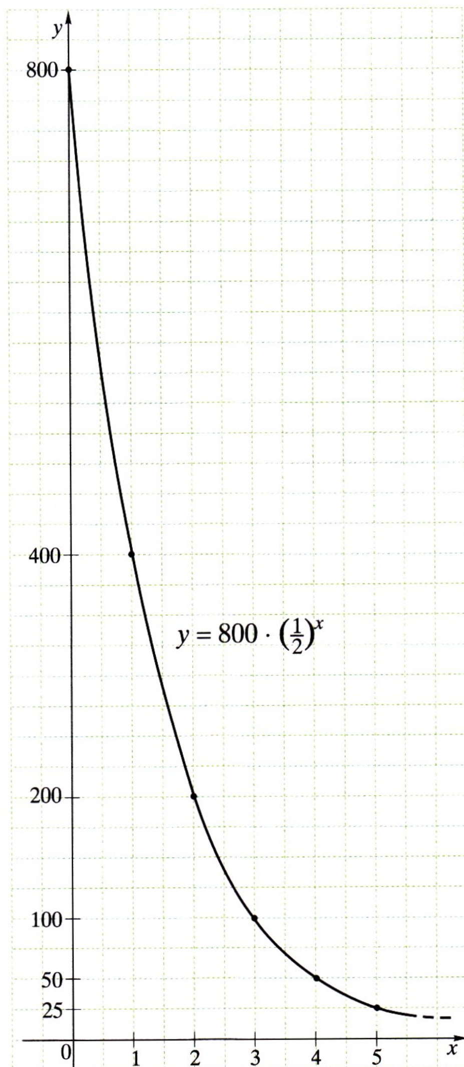
$$\left(800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

bakterijų.

Taigi po 5 dienų mėgintuvėlyje bus

$$800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 800 \cdot \frac{1}{32} = 25$$

bakterijos.



Apskritai, jei dydis a per tam tikrą laiko tarpsnį *sumažėja* k kartų, tai po x tarpsnių dydžio a reikšmė y bus

$$y = a \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^x$$

3 PAVYZDYS. Darbuotojui skyrė 1000 Lt atlyginimą ir kiekvienais metais jį vis didins 20%. Koks bus darbuotojo atlyginimas po 10 metų?
Kadangi darbuotojo atlyginimas kiekvienais metais didės 20%, tai jo atlyginimas kiekvienais metais padidės 1,2 karto. Vadinasi,
po 1 metų jo atlyginimas bus

$$1000 \cdot 1{,}2,$$

po 2 metų –

$$(1000 \cdot 1{,}2) \cdot 1{,}2 = 1000 \cdot 1{,}2^2,$$

po 3 metų –

$$\left(1000 \cdot 1{,}2^2\right) \cdot 1{,}2 = 1000 \cdot 1{,}2^3,$$

. . . .

po 10 metų –

$$1000 \cdot 1{,}2^{10} \approx 6192\,(\text{Lt}),$$

po n metų atlyginimas bus

$$1000 \cdot 1{,}2^n.$$

Apskritai, jei dydis a per kiekvieną laiko tarpsnį *padidėja* p procentų, tai po x laiko tarpsnių dydžio a reikšmė y bus

$$y = a \cdot \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^x$$

4 PAVYZDYS. Prekė, kainavusi 1000 litų, kas metus vis atpiginama 20%. Kiek kainuos prekė po 10 metų?
Kadangi prekės kaina kiekvienais metais sumažėja 20%, tai jos kaina kiekvienais metais sudarys 80% buvusios kainos. Vadinasi,
po 1 metų prekė kainuos

$$1000 \cdot 0{,}8,$$

po 2 metų –

$$(1000 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}8 = 1000 \cdot 0{,}8^2,$$

. . . .

po 10 metų –

$$1000 \cdot 0{,}8^{10} \approx 107\,(\text{Lt}),$$

po n metų prekė kainuos

$$1000 \cdot 0{,}8^n.$$

Apskritai, jei dydis a per kiekvieną laiko tarpsnį *sumažėja* p procentų, tai po x laiko tarpsnių dydžio a reikšmė y bus

$$y = a \cdot \left(1 - \tfrac{p}{100}\right)^x$$

Pratimai ir uždaviniai

342. Bakterijų skaičius mėgintuvėlyje per dieną padvigubėja. Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje po 1 dienos; po 3; po 10; po n dienų, jei iš pradžių bakterijų buvo:
a) 100? b) 150? c) 200?
Po kelių dienų bakterijų skaičius mėgintuvėlyje padidės apie 1000 kartų?

343. Bakterijų skaičius per dieną mėgintuvėlyje sumažėja dvigubai. Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje po 1 dienos; po 4; po 10; po n dienų, jei iš pradžių bakterijų buvo:
a) 1000? b) 10 000? c) 1 000 000?
Po kelių dienų bakterijų skaičius mėgintuvėlyje sumažės apie 1000 kartų?

344. Kiekvieną mėnesį prekės kaina buvo didinama 5%. Kiek kainavo prekė po 1 mėn.; po 2 mėn.; po 5 mėn.; po n mėnesių, jei prekė iš pradžių kainavo:
a) 10 Lt? b) 100 Lt? c) 1000 Lt?

345. Iš pradžių tvenkinyje buvo 2000 žuvų. Buvo nustatyta, kad žuvų skaičius tvenkinyje per metus sumažėja:
a) 7%; b) 10%; c) n%.
Kiek žuvų bus tvenkinyje po 1 metų; 2 metų; 3 metų; 20 metų; t metų?

346. Bankas moka 5% metinių sudėtinių palūkanų. Kiek bus pinigų sąskaitoje po 5 metų, jei pradinis indėlis 2000 Lt ir indėlininkas per tą laiką neėmė pinigų iš sąskaitos? Po kelerių metų sąskaitoje bus 2205 Lt?

347. Iš atviros benzino talpyklos per savaitę išgaruoja 20% benzino. Kiek procentų benzino išgaruos po 2 savaičių; po 3 savaičių; po 4 savaičių?

348. Bakterijų skaičius auga pagal dėsnį $B(t) = 3000 \cdot 16^t$, t — laikas valandomis. Kiek buvo bakterijų pradiniu laiko momentu $t = 0$? Kiek bus bakterijų po $\frac{1}{4}$ h; po $\frac{1}{2}$ h; po 1 h? Po kiek laiko bakterijų kiekis padvigubės?

349. Iš atviro indo, kuriame yra 1000 mℓ skysčio, per savaitę išgaruoja 40% inde esančio skysčio. Po t savaičių inde likusio skysčio kiekį apskaičiuojame pagal formulę $V(t) = 1000 \cdot (0{,}6)^t$. Kiek skysčio liko inde po 1 savaitės? Apskaičiuokite 0,1 tikslumu, po kelių savaičių inde bus mažiau nei 1 mℓ skysčio.

350. Kokia turi būti m reikšmė, kad funkcijos $f(x) = m \cdot 8^x$ grafikas eitų per tašką $(0; 4)$? Kurie iš taškų $A(1; 32)$, $B(2; 256)$, $C(-1; 2)$, $D(-2; 0{,}0625)$ priklausys šios funkcijos grafikui? Raskite x reikšmę, su kuria funkcijos reikšmė lygi 2.

351. Pradžioje mėginyje buvo 1000 bakterijų, po 3 valandų — jau 8000. Žinodami, kad bakterijos dauginasi pagal eksponentinį (rodiklinį) dėsnį, t. y. kas valandą jų kiekis padidėja vienodą skaičių kartų, užrašykite jį. Po kelių valandų bakterijų kiekis bus dvigubai didesnis už pradinį; bus lygus 32 000?

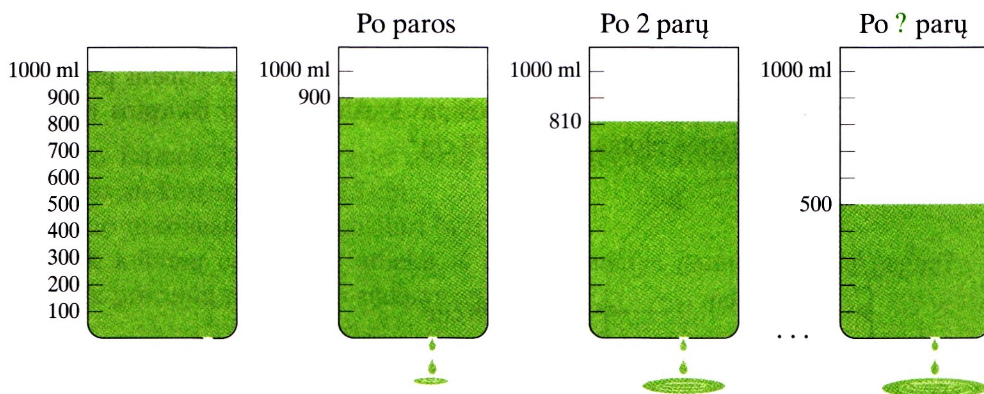
352. Ūkininkas namo statybai pasiskolino 20 000 Lt. Parašykite formulę, pagal kurią apskaičiuojamas skolos dydis kartu su palūkanomis, jei sudėtinių palūkanų norma 10% per metus. Po kelerių metų skola kartu su palūkanomis sudarys 32210,2 Lt?

353. JAV valstybės veikėjas Benjaminas Franklinas testamentu Bostono bendruomenei skyrė 1000 svarų sterlingų ir nurodė, kaip juos panaudoti:

- Pirmuosius 100 metų tuos pinigus skolinti patikimiems verslininkams už 5% metinių sudėtinių palūkanų. Po 100 metų iš susidariusios sumos 100 000 svarų sterlingų skirti Bostono visuomeninių pastatų statybai, likusius 31 501 svarų sterlingų vėl skolinti 100 metų tomis pačiomis sąlygomis.
- Po antrųjų 100 metų susidariusią sumą padalyti taip: 3 000 000 svarų sterlingų skirti Masačiusetso bendruomenei, o likusią sumą — Bostono bendruomenei.

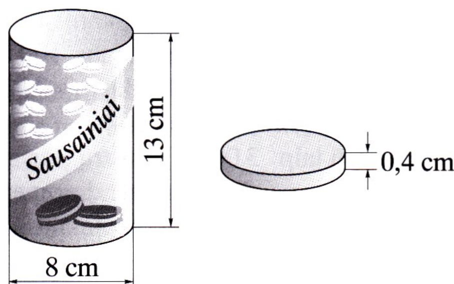
1) Kiek kartų padidėja 1000 svarų sterlingų suma po 100 metų, skolinant ją su 5% metinių sudėtinių palūkanų?
2) Kiek kartų padidėja 31 501 svarų sterlingų suma po 100 metų, skolinant ją su 5% metinių sudėtinių palūkanų?
3) Nesinaudodami skaičiuokliu, remdamiesi šio uždavinio duomenimis, nustatykite, kam lygu $1{,}05^{100}$.

354. Inde yra skylutė, per kurią per parą išteka 0,1 inde buvusio vandens kiekio. Per kiek laiko ištekės pusė vandens?

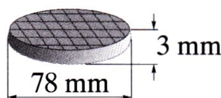


7.5. Geometrijos uždaviniai

355. Paveikslėlyje pavaizduota ritinio formos skardinė dėžutė. Dėžutės pagrindo skersmuo lygus 8 cm, o aukštis — 13 cm. Užklijuota etiketė dengia visą dėžutės šoninį paviršių. Dangtelis pagamintas iš plastmasės, jo aukštis — 0,4 cm.

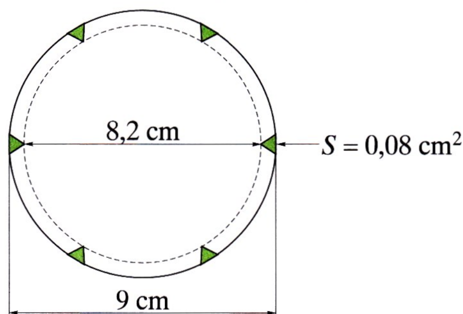


1) Koks dėžutės etiketės plotas kvadratiniais centimetrais?
2) Į dėžutę dedami ritinio formos sausainiai:



a) Kiek tokių sausainių tilps į dėžutę?
b) Kiek svers visi dėžutės sausainiai, jei 1 cm^3 sausainių sveria 1 gramą?

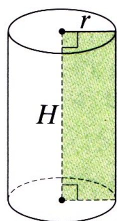
3) Dėžutės dangtelis buvo pagamintas iš apvalaus 9 cm skersmens plastmasinio ruošinio. Gaminant dangtelį, ruošinio kraštuose buvo iškirptos 6 išpjovos, kurių kiekvienos plotas lygus 0,08 cm^2.



a) Koks dangtelio ruošinio plotas (0,1 cm^2 tikslumu)?
b) Koks dangtelio viršaus plotas (0,1 cm^2 tikslumu)?
c) Koks dangtelio pakraščio plotas (0,1 cm^2 tikslumu)?
d) Kiek procentų dangtelio ruošinio sudarė atliekos (6 išpjovos)?
e) Kiek litrų vandens (0,1 ℓ tikslumu) tilptų į tokią tuščią dėžutę ($\pi \approx 3{,}14$)?



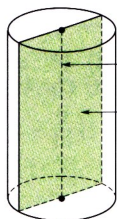
Stačiakampį sukdami apie jo kraštinę, gauname *ritinį*:



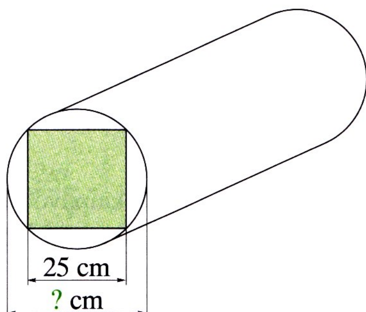
H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$,
$S_{\text{šon}} = 2\pi r H$,
$S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2S_{\text{pagr}} = 2\pi r H + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r)$,
$V = \pi r^2 H$.

356. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus 80 cm^2. Ritinio pagrindo spindulys 3 cm trumpesnis už ritinio aukštinę. Raskite ritinio:
a) viso paviršiaus plotą; b) tūrį.





357. Iš ritinio formos 5 m ilgio rąsto reikia išpjauti gegnę, kurios skerspjūvis būtų kvadratas su kraštine, lygia 25 cm.
1) Kokio mažiausio skersmens turi būti rąstas?
2) Kiek kubinių centimetrų atliekų iš rąsto susidarys gaminant tokią gegnę? Kiek procentų rąsto tūrio sudarys atliekos?



7.6. Pasitikrinkime

358. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

c) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1) Išvardykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ savybes.

2) Remdamiesi a) ir b) punktų grafikais, palyginkite skaičius: $2^{3,1}$ ir $3^{3,1}$; $2^{-3,1}$ ir $3^{-3,1}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3,1}$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^{3,1}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3,1}$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3,1}$.

359. Išspręskite lygtis.

a) $2^x = 32$, $2^x = 1$, $2^x = \frac{1}{4}$, $2^x = -4$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -3$.

360. Išspręskite lygtį.

a) $2^{3x+5} = 16$; b) $3^{3x^2-1} = 9$; c) $7^{x-5} = 7^{2-3x}$; d) $4^{x^2} = 2^x$.

361. Grafiškai pavaizduokite lygties sprendinius.

a) $2^x = 4$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$.

362. Išspręskite nelygybę.

a) $2^x > 4$; b) $3^x \leqslant 3$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant 8$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; e) $2^x > -1$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant -9$.

363. Grafiškai pavaizduokite nelygybės sprendinius.

a) $3^x \geqslant \frac{1}{3}$; b) $2^x < -2$.

364. a) Bakterijų skaičius mėgintuvėlyje per dieną patrigubėja. Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje po 1 dienos; po 2; po 3; po n dienų, jei iš pradžių buvo 500 bakterijų?

b) Iš pradžių inde buvo 300 000 000 molekulių. Kas minutę inde molekulių sumažėja keturgubai. Kiek molekulių bus inde po 1 minutės; po 2; po 3; po n minučių?

365. a) Kiekvieną ketvirtį prekės kaina buvo didinama 10%. Kiek kainavo prekė po 1 ketvirčio; po 2 ketvirčių; po 3 ketvirčių; po n ketvirčių, jei prekė iš pradžių kainavo 200 litų?

b) Žuvų skaičius tvenkinyje per metus sumažėja 5%. Kiek žuvų bus tvenkinyje po 1 metų? po 2 metų? po 3 metų? po n metų? jei iš pradžių tvenkinyje buvo 1 000 000 žuvų?

366. Ritinio pagrindo spindulys yra 5 mm, o aukštis — 2 cm. Apskaičiuokite ritinio:

a) šoninio paviršiaus plotą; b) viso paviršiaus plotą; c) tūrį.

Skyrelių „Pasitikrinkime“ uždavinių atsakymai

1. Aibės

110. 1) $p, a, u, k, š, t, i, s$; 2) a;
3) a) k, l, a, s; b) $a, š$; c) $p, a, u, k, š, t, i, s, l, o, v$; d) $l, o, v, a, š$.
111. a) 4; 5; 7; b) -3; 4; 0; -4; 5; 7; c) -3; 4; $\frac{1}{5}$; $-0{,}7$; 0; -4; 5; $\frac{2}{9}$; $0,(15)$; 7; d) 4; $\frac{1}{5}$; $\frac{3\pi}{5}$; 0; 5; $\frac{2}{9}$; $0,(15)$; 7; e) -3; $-0{,}7$; 0; -4; $-\sqrt{7}$; f) 4 ir -4; g) $\frac{1}{5}$ ir 5; h) 5; 7; i) 4; j) $\frac{3\pi}{5}$; $-\sqrt{7}$; k) -3; 4; $\frac{1}{5}$; $-0{,}7$; $\frac{3\pi}{5}$; 0; -4; 5; $-\sqrt{7}$; $\frac{2}{9}$; $0,(15)$; 7.
112. a) 220 Lt; b) 110 Lt; c) 22 Lt; d) 20%.
113. a) 5,7; b) -20; c) $6\frac{1}{3}$; d) $-3{,}68$; e) 8,4; f) $\frac{1}{2}$; g) $1\frac{4}{15}$; h) $\frac{7}{9}$; i) $-\frac{13}{28}$; j) $1\frac{5}{6}$; k) $-2\frac{1}{4}$; l) -7.
114. a) 4,5; b) $-9{,}6$; c) $\frac{1}{3}$; d) 8; e) 5; f) -28; g) $\frac{2}{9}$; h) $10\frac{6}{7}$; i) -1; j) $-\frac{2}{3}$; k) 0,5; l) $-\frac{3}{10}$.
115. a) 8; -8; -8; 16; 16; -16; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; -2; -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; 1; -2; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2; 3. b) 3; 11; 1; 0,1; $\frac{2}{5}$; $3\frac{2}{3}$; 0; 2; -2; 1; -1; 0,2; $-\frac{2}{5}$; 0; 0,1; $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; c) 1; -1; -1; 1; 0; 1; 0; -1; 2; -3.
116. a) 3; b) 1; c) 4; d) 0; e) 3; f) 5; g) $\frac{1}{100}$; h) -2.
117. a) $\{-12\}$; b) $\{-\frac{9}{14}\}$; c) $\{1\}$; d) $\{-2\}$; e) $\{3\}$; f) $\{0\}$; g) $\{-0{,}1; 0{,}1\}$; h) $\varnothing$; i) $\{0\}$; j) $\{-\sqrt{3}; 0; 1\}$; k) $\{1; 3\}$; l) $\{-2\}$.
118. a) $x \in (-2; +\infty)$; b) $x \in (0; +\infty)$; c) $x \in [1; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; 3]$; e) $x \in (-3; +\infty)$; f) $x \in [-5; +\infty)$.
119. a) $x \in [-5; 5]$; b) $x \in (-\infty; -2)$; c) $\varnothing$; d) $x \in [0; 8]$; e) $x \in [4; +\infty)$; f) $\varnothing$.
120. $4\sqrt{2}$ cm. **121.** a) $5\sqrt{65}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $\sqrt{10}$; d) 5; e) 5; f) $10\cos 50^\circ$.
122. a) $26 \operatorname{tg} 54^\circ \approx 36$ m; b) $26 \operatorname{tg} 25^\circ \approx 12$ m. **123.** $20 \sin 20^\circ \approx 6800$ m.

2. Reiškiniai

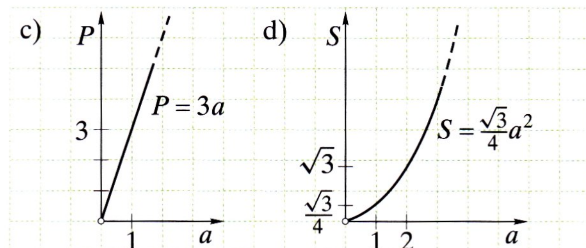
164. a) 4; b) $2\sqrt{2} - \frac{5}{2}$; c) $-22{,}75$.
165. a) Ritinio pagrindai — apskritimai. Jų plotų suma $2\pi r^2$. Ritinio šoninio paviršiaus išklotinė yra stačiakampis su kraštinėmis lygiomis h ir $2\pi r$ (pagrindo apskritimo ilgis). Šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = 2\pi r \cdot h = 2\pi rh$. Viso paviršiaus plotas $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$.
b) 6π cm^2; c) 23 cm; d) $\sqrt{51} - 1$ cm.
166. a) $5b - 10a^2$; b) $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$; c) $-a^2$; d) $3y^2 - 3x^2$.
167. a) $\frac{a}{a-b}$; b) $1 + 2b$; c) $\frac{a-b}{a+b}$; d) $\frac{x+y}{x-y}$; e) $\frac{x+2}{2}$; f) $x^{14}(x-1)$; g) $\frac{3+x}{3-x}$; h) $a^2 - b^2$.
168. a) $2a$; b) $-\frac{11x}{12}$; c) $\frac{31}{6a}$; d) $\frac{12a}{5x}$; e) $\frac{7x^2}{3a}$.
169. a) $(x+1)(x+1)$; b) $(2x-1)(2x-1)$; c) $(x-3)(x+5)$; d) išskaidyti negalima.
170. a) a^2; b) b^8; c) 1; d) 2^{a+b-2c}.
171. 1) 2,01 s; 2) $\approx 0{,}25$ m. **172.** 1) a) 8,75 cm^2; b) $6\sqrt{2}$; 2) a) 20 cm^2; b) 16.

203. a) $P(a) = 3a$; $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Trikampis yra lygiakraštis.

$a =$	1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
$P =$	3	$\frac{3}{2}$	$3\sqrt{2}$	6	$6\sqrt{2}$
$S =$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

b) $P(a) = 4a$; $S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; $h(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Keturkampis yra rombas.

$a =$	2	6	1	$2\sqrt{2}$
$h =$	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{6}$
$P =$	8	24	4	$8\sqrt{2}$
$S =$	$2\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$4\sqrt{3}$



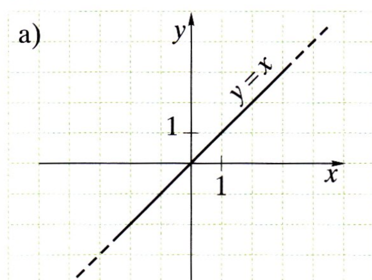
204. 1)

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s =$	0	4	6	6	12	12	12	6	0

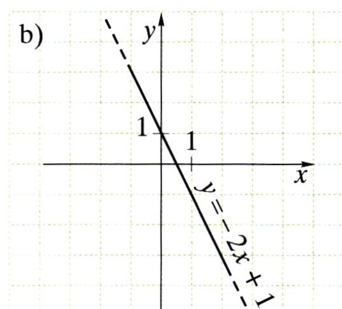
2) Turistai nuo stovyklavietės tolo 1-ą, 2-ą ir 4-ą žygio valandas. Turistų ėjimo vidutinis greitis: 1-ą žygio valandą — 4 km/h; 2-ą žygio valandą — 2 km/h; 4-ą žygio valandą — 6 km/h; 7-ą žygio valandą — 6 km/h; 8-ą žygio valandą — 6 km/h. Vidutinis turistų ėjimo greitis buvo 4,8 km/h, o vidutinis kelionės greitis buvo 3 km/h.

205. a) Nėra proporcingi; b) atvirkščiai proporcingi; c), d) — tiesiogiai proporcingi.

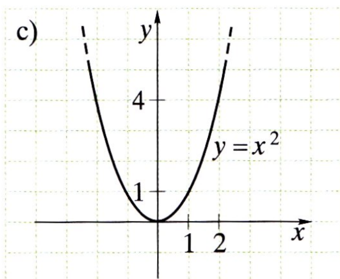
206.



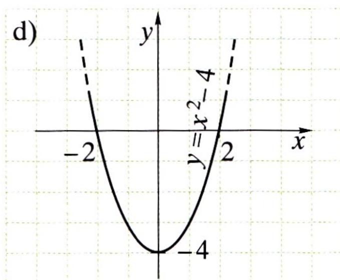
1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$; E: $y \in (-\infty; +\infty)$.
2) Funkcija yra didėjančioji visoje apibrėžimo srityje.
3) Funkcija:
įgyja teigiamas reikšmes, kai $x \in (0; +\infty)$;
įgyja neigiamas reikšmes, kai $x \in (-\infty; 0)$;
lygi 0, kai $x = 0$.
4) Funkcija yra nelyginė.



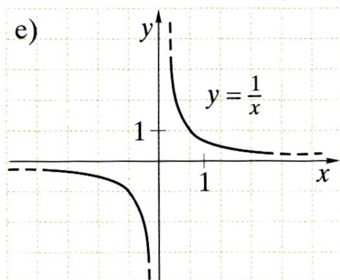
1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$; E: $y \in (-\infty; +\infty)$.
2) Funkcija yra mažėjančioji visoje apibrėžimo srityje.
3) Funkcija:
įgyja teigiamas reikšmes, kai $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$;
įgyja neigiamas reikšmes, kai $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$;
lygi 0, kai $x = \frac{1}{2}$.
4) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.



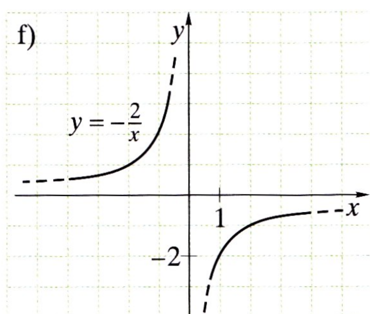
1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$; E: $y \in [0; +\infty)$.
2) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$.
3) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y = 0$, kai $x = 0$.
4) Funkcija yra lyginė.



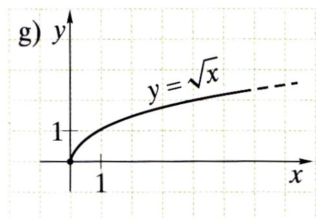
1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$; E: $y \in [-4; +\infty)$.
2) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$.
3) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (-2; 2)$; $y = 0$, kai $x = -2$, $x = 2$.
4) Funkcija yra lyginė.



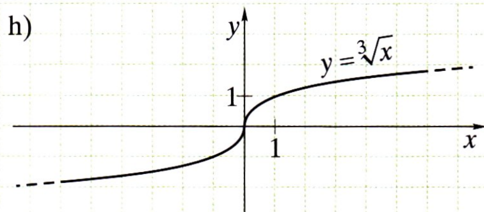
1) D: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; E: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2) Funkcija yra mažėjančioji.
3) $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$.
4) Funkcija yra nelyginė.



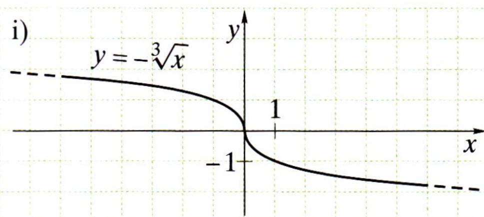
1) D: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; E: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2) Funkcija yra didėjančioji.
3) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$; $y < 0$, kai $x \in (0; +\infty)$.
4) Funkcija yra nelyginė.



1) D: $x \in [0; +\infty)$; E: $y \in [0; +\infty)$.
2) Funkcija yra didėjančioji.
3) $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; $y = 0$, kai $x = 0$.
4) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

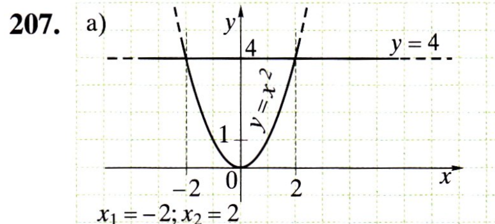


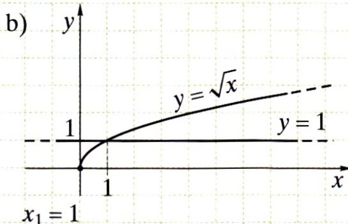
1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$;
E: $y \in (-\infty; +\infty)$.
2) Funkcija yra didėjančioji.
3) $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
$y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$;
$y = 0$, kai $x = 0$.
4) Funkcija yra nelyginė.

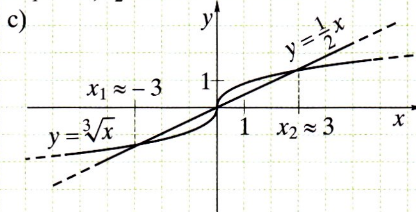


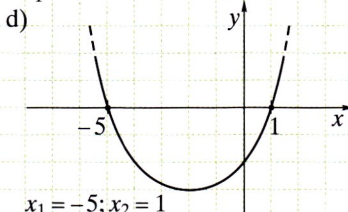
1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$;
E: $y \in (-\infty; +\infty)$.
2) Funkcija yra mažėjančioji.
3) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$;
$y < 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
$y = 0$, kai $x = 0$.
4) Funkcija yra nelyginė.

207.

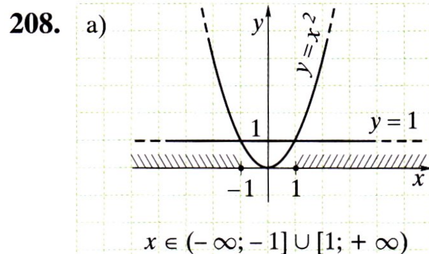


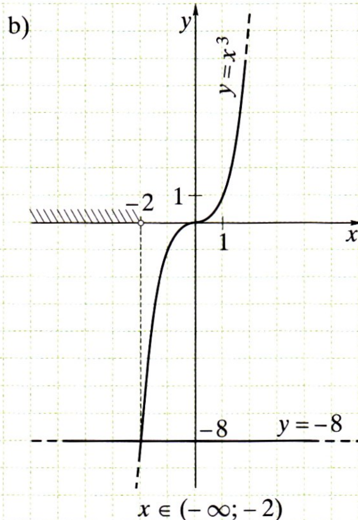


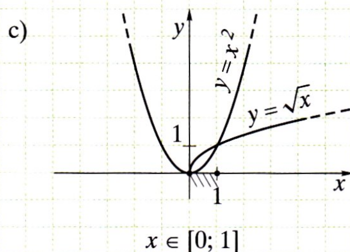




208.

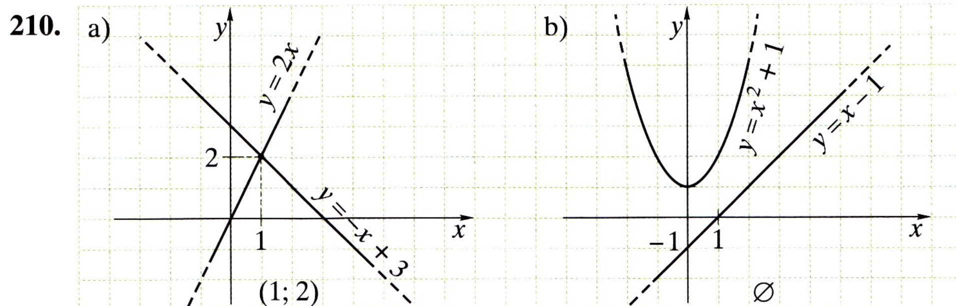






d) $x \in (-5; 1)$ (žr. 207d) brėžinį).

209. a) 1) D: $x \in [-3; +\infty)$; E: $y \in (-\infty; 4)$. 2) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (0; 2)$; mažėja, kai $x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$; yra pastovios, kai $x \in [-3; -1]$.
3) $y > 0$, kai $x \in [-3; 0) \cup (0; 4)$; $y < 0$, kai $x \in (4; +\infty)$.
4) $\max f(x) = 4$; mažiausios reikšmės funkcija neturi.
b) 1) D: $x \in [-4; +\infty)$; E: $y \in [-4; +\infty)$. 2) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-4; -2) \cup (4; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (2; 4)$; yra pastovios, kai $x \in [-2; 2]$.
3) $y > 0$, kai $x \in [-2{,}4; 3) \cup (5; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in [-4; -2{,}4) \cup (3; 5)$.
4) $\min f(x) = -4$; didžiausios reikšmės funkcija neturi.

210.


211. 1) (1; 0); (−2; 3); 2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$

212. a) $BC \approx 3{,}3$ cm; $\angle B \approx 104^\circ$, $\angle C \approx 36^\circ$; b) $AB \approx 4{,}3$ cm; $BC \approx 4{,}6$, $\angle B \approx 85^\circ$; c) $\angle C \approx 37^\circ$; $\angle A \approx 53^\circ$, $\angle B \approx 90^\circ$.

4. Lygtys. Lygčių sistemos

247. a) $x = 1\frac{1}{9}$; b) $x = -\frac{1}{8}$.
248. a) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$; b) $x = 0$, $x = -\frac{5}{2}$; c) $x = -2$, $x = 2$; d) sprendinių nėra.
249. a) $x = -3$, $x = -1$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$; d) sprendinių nėra.
250. a) $x = 0$, $x = 4$; b) $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$; c) $x = 0$.
251. a) $x = -1$, $x = 0$; b) $x = 0$; c) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$.
252. a) $x = -2$, $x = 2$; b) sprendinių nėra; c) $x = 0$; d) $x = -\sqrt[4]{3}$, $x = \sqrt[4]{3}$; e) $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$; f) $x = 0$.
253. a) $x = -1$, $x = 1$; b) $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$; c) sprendinių nėra.
254. 9 km/h.
255. a) $x = 4{,}5$, $y = -2{,}5$; b) $x = \frac{35}{16}$, $y = -\frac{15}{8}$; c) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; d) $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = -1$.
256. a) 1,5; 5,5; b) 24 cm^2.
257. Lygiakraščio trikampio plotas $\frac{625\cdot\sqrt{3}}{9}$ cm^2; kvadrato plotas 156,25 cm^2; taisyklingojo šešiakampio plotas $\frac{625\cdot\sqrt{3}}{6}$ cm^2; skritulio plotas $\frac{625}{\pi}$ cm^2.

5. Nelygybės

281. a) $x \in (-\infty; -1)$; b) $x \in (-\infty; 4\frac{2}{9}]$.
282. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; b) $\varnothing$; c) $x \in (-\infty; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{4}; +\infty)$; e) $x \in [-\frac{1}{6}; 0]$; f) $x \in [-\frac{5}{2}; 0]$; g) $x \in (-\infty; -3) \cup (10; +\infty)$; h) $x \in (-\infty; +\infty)$; i) $x = 5$.

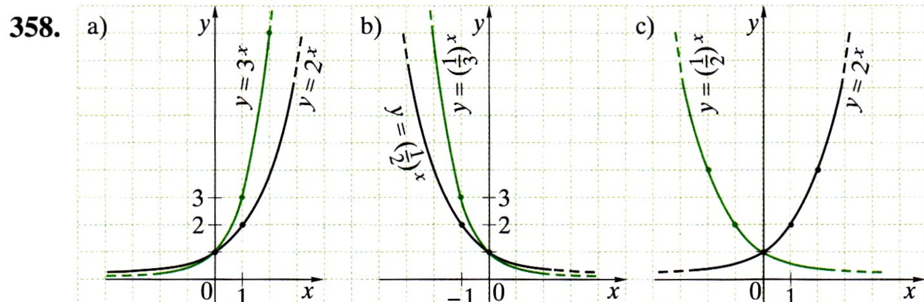
283. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{3}{5}; +\infty)$; b) $x \in [-\frac{2}{5}; 0)$; c) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; +\infty)$. **284.** a) $x \in (-\frac{3}{2}; +\infty)$; b) $x \in (0{,}5; +\infty)$.
285. Ilgesnė už 4 cm. **286.** Taip. **287.** a) 8 m; b) 18,75 m.

6. Laipsninė funkcija

317. **A** — $g(x) = x^6$; **B** — $h(x) = \sqrt[5]{x}$; **C** — $l(x) = \sqrt[6]{x}$; **D** — $f(x) = x^5$.
318. a) $f(x) = x^{10}$: 1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$, E: $y \in [0; +\infty)$; 2) reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$, reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$; 3) $f(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $f(x) \geqslant 0$ su visomis x reikšmėmis; 4) funkcija yra lyginė.
$g(x) = x^{11}$: 1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$, E: $y \in (-\infty; +\infty)$; 2) reikšmės didėja visoje apibrėžimo srityje; 3) $g(x) > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; $g(x) < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$; 4) funkcija yra nelyginė.
$h(x) = \sqrt[10]{x}$: 1) D: $x \in [0; +\infty)$, E: $y \in [0; +\infty)$; 2) reikšmės didėja visoje apibrėžimo srityje; 3) $h(x) > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; $h(x) \geqslant 0$ su visomis x reikšmėmis iš apibrėžimo srities; 4) funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
$l(x) = \sqrt[11]{x}$: 1) D: $x \in (-\infty; +\infty)$, E: $y \in (-\infty; +\infty)$; 2) reikšmės didėja visoje apibrėžimo srityje; 3) $l(x) > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; $l(x) < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$; 4) funkcija yra nelyginė.
b) 1) $l(2)$, $h(2)$, $f(2)$, $g(2)$; 2) $l(\frac{1}{2})$, $h(\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $g(\frac{1}{2})$.
c) 1) $\{-1; 1\}$, $\{1\}$, $\{1\}$, $\{1\}$; 2) $\varnothing$, $\{-1\}$, $\varnothing$, $\{-1\}$; 3) $\{-2; 2\}$, $\{2\}$, $\varnothing$, $\{-2048\}$; 4) $\{-\sqrt[10]{2}; \sqrt[10]{2}\}$, $\{\sqrt[11]{2}\}$; 5) $\{0\}$, $\{-2\sqrt[10]{2}; 2\sqrt[10]{2}\}$, $\{0; 1\}$.
319. a) $x = -2$, $x = 2$; b) $x = 4$; c) $x = 1$, $x = 9$; d) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.
320. a) 1) $x = -2$, $x = 2$; 2) $x^4 = 16$; b) 1) $x = -1$; 2) $\sqrt[3]{x} = -1$; c) 1) $\varnothing$; 2) $\sqrt[6]{x} = -3$; d) 1) $x = 2$; 2) $x^3 = 8$.
321. a) $x = -0{,}5$; b) $\varnothing$; c) $x = -2$, $x = 2$; d) $x = 0$, $x = 5$; e) $x = 1$; f) $x = -3$, $x = 1$.
322. a) 5400 cm^2; b) 22 ℓ.
323. 1) 5; 2) 10; 3) $\sqrt[3]{n}$.

7. Rodiklinė funkcija

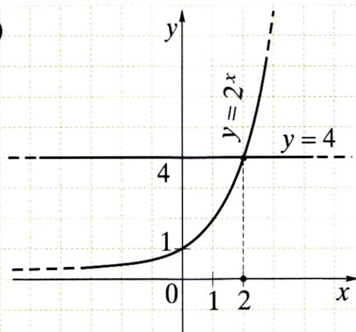
358.



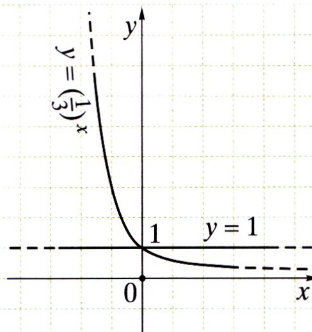
1) a) $D_f = D_g$: $x \in (-\infty; +\infty)$; $E_f = E_g$: $y \in (0; +\infty)$. Funkcijos $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = 3^x$ yra didėjančiosios, jų reikšmės yra teigiamos visoje apibrėžimo srityje; y ašį kerta taške $(0; 1)$. Abi funkcijos nėra nei lyginės, nei nelyginės. b) $D_f = D_g$: $x \in (-\infty; +\infty)$; $E_f = E_g$: $y \in (0; +\infty)$. Funkcijos $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ ir $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ yra mažėjančiosios, jų reikšmės yra teigiamos visoje apibrėžimo srityje; y ašį kerta

taške (0; 1). Abi funkcijos nėra nei lyginės, nei nelyginės. c) Funkcijos $f(x) = 2^x$ savybės išvardytos a) punkte, o funkcijos $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ — b) punkte.
2) $2^{3,1} < 3^{3,1}$; $2^{-3,1} > 3^{-3,1}$; $(\frac{1}{2})^{3,1} > (\frac{1}{3})^{3,1}$; $(\frac{1}{2})^{-3,1} < (\frac{1}{3})^{-3,1}$.
359. a) {5}, {0}, {−2}, {∅}; b) {2}, {−3}, {0}, {∅}.
360. a) $x = -\frac{1}{3}$; b) $x = -1$, $x = 1$; c) $x = 1\frac{3}{4}$; d) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

361. a)

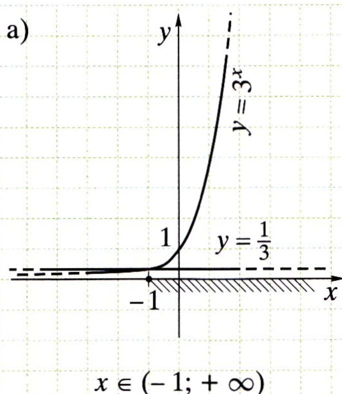


b)

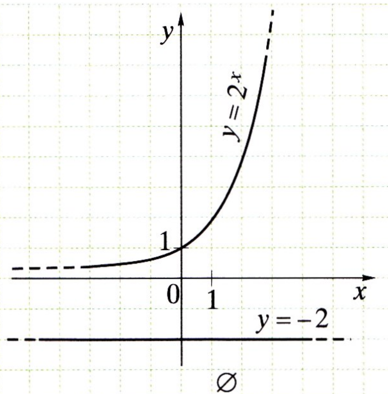


362. a) $x \in (2; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 1]$; c) $x \in (-\infty; -3]$; d) $x \in (-\infty; 2)$;
e) $x \in (-\infty; +\infty)$; f) ∅.

363. a)



b)



364. a) 1500; 4500; 13 500; $500 \cdot 3^n$; b) 75 000 000; 18 750 000; 4 687 500;
$300\,000\,000 \cdot (\frac{1}{4})^n$.
365. a) 220 Lt; 242 Lt; 266,2 Lt; $200 \cdot 1,1^n$ Lt; b) 950 000; 902 500; 857 375;
$1\,000\,000 \cdot 0,95^n$.
366. a) 200π mm^2; b) 250π mm^2; c) 500π mm^3.




ISBN 9955-680-01-6
9 789955 680017